

# Ein iteratives gitterfreies Verfahren zur Lösung der Helmholtz Gleichung

Christina Wenterodt, Otto von Estorff

Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung, Denickestraße 17, D-21073 Hamburg

E-Mail: c.wenterodt@tu-harburg.de, estorff@tu-harburg.de

## Einleitung

Für akustische Berechnungen im mittleren Frequenzbereich wird oft die Finite-Elemente-Methode (FEM) eingesetzt. Die Genauigkeit der Ergebnisse leidet jedoch bei hohen Wellenzahlen unter dem so genannten Dispersions-effekt. Werden statt der FEM gitterfreie Verfahren, wie z.B. die Element Free Galerkin Method (EFGM) oder die Radial Point Interpolation Method (RPIM) verwendet, kann der Dispersionseffekt bei gleicher Feinheit der Diskretisierung deutlich verringert werden [1, 2].

Ein weiterer Vorteil der gitterfreien Methoden besteht darin, dass die Ansatzfunktionen an die zu lösende Differentialgleichung angepasst werden können. Daraus lässt sich ein iteratives Verfahren ableiten bei dem zunächst mit einer herkömmlichen gitterfreien Methode eine erste Näherung bestimmt wird. Dann werden mit Hilfe dieser Näherung neue Ansatzfunktionen konstruiert, die den Wellencharakter der Lösung besser wiedergeben. Auf diese Weise lässt sich mit verhältnismäßig geringem Mehraufwand die Qualität der Lösung verbessern.

In dem vorliegenden Beitrag wird eine solche iterative EFGM und eine iterative RPIM vorgestellt, kritisch diskutiert und mit der FEM verglichen.

## Gitterfreie Methoden

Gitterfreie Methoden benötigen im Gegensatz zu herkömmlichen netzbasierten Methoden, wie der FEM, kein Gitter, um das zu untersuchende Gebiet  $\Omega$  zu repräsentieren. In  $\Omega$  und auf dem Rand  $\Gamma$  werden zunächst Feldpunkte  $\mathbf{x}_i$  beliebig verteilt. In Abhängigkeit von diesen Feldpunkten lassen sich dann Ansatzfunktionen  $\Phi_i$  konstruieren. Wie bei der FEM wird ein Gleichungssystem aufgestellt, indem die Ansatzfunktionen in eine schwache Form der Helmholtz Gleichung eingesetzt werden, die anschließend numerisch integriert wird. Hierfür ist ein sogenanntes Backgroundmesh erforderlich, das die Form von  $\Omega$  jedoch nicht abbilden muss und unabhängig von der Feldpunktverteilung gewählt werden kann. Aus dem Gleichungssystem ergibt sich der Lösungsvektor  $\mathbf{p}$ . Durch Interpolation der Koeffizienten  $p_i$  mit den Ansatzfunktionen  $\Phi_i$  kann dann der Schalldruck an einem beliebigen Punkt im Berechnungsgebiet  $\Omega$  bestimmt werden.

## EFGM und RPIM Ansatzfunktionen

Um die Ansatzfunktionen der Element Free Galerkin Method (EFGM) zu erhalten, wird der unbekannte Schalldruck durch

$$p^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q) = \sum_{i=1}^n P_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \quad (1)$$

interpoliert. Dabei ist  $\mathbf{P}^T(\mathbf{x})$  eine Basis, die im zweidimensionalen Fall beispielsweise als

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad y] \quad (2)$$

gewählt werden kann. Der Koeffizientenvektor  $\mathbf{a}(\mathbf{x}_Q)$  wird durch die Minimierung eines Funktionals derart bestimmt, dass die Näherungsfunktion  $p^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q)$  an den Feldpunkten möglichst gut mit den zugehörigen Koeffizienten  $p_i$  des Lösungsvektors übereinstimmt.

Zur Herleitung der Ansatzfunktionen der Radial Point Interpolation Method (RPIM) wird von einem Ansatz der Form

$$\begin{aligned} p^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q) &= \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_Q) + \sum_{j=1}^n P_j(\mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}_Q) \quad (3) \\ &= \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}_Q) \end{aligned}$$

ausgegangen. Hierbei werden radiale Basisfunktionen  $R_i$  verwendet. Die zusätzliche Polynombasis  $\mathbf{P}^T(\mathbf{x})$  sichert die Konsistenz des Verfahrens und kann wie für die EFGM in Gleichung (2) gewählt werden. Die unbekannt Koeffizienten  $a_i$  und  $b_j$  werden so gewählt, dass Gleichung (3) an den  $n$  Feldpunkten, die den Punkt  $\mathbf{x}_Q$  beeinflussen, erfüllt ist.

Eine ausführliche Herleitung der Ansatzfunktionen für die EFGM und die RPIM ist in [3] angegeben.

## Iteratives Verfahren

Ein Vorteil der gitterfreien Methoden besteht darin, dass die Ansatzfunktionen auf einfache Weise an das zu lösende Problem angepasst werden können. Wird statt der Polynombasis in Gleichung (2) eine Basis der Form

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1 \quad \cos \theta(x, y) \quad \sin \theta(x, y)] \quad (4)$$

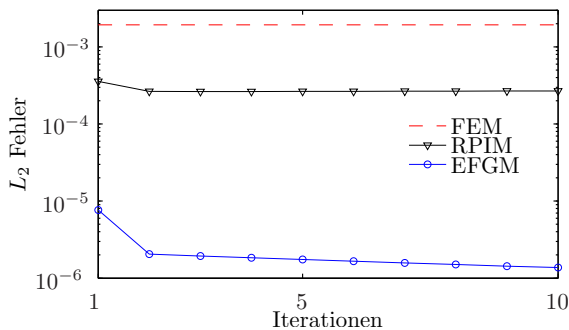
verwendet, wobei  $\theta(x, y)$  die Phase der Welle ist, so können die resultierenden Ansatzfunktionen den Schalldruck exakt interpolieren. Da die Phasenverteilung im Allgemeinen nicht bekannt ist, wird eine erste Näherung für den Schalldruck mit einer herkömmlichen EFGM bzw. RPIM berechnet. Aus dieser Näherung wird dann die Phasenverteilung bestimmt, mit der die Ansatzfunktionen für eine zweite Näherung berechnet werden.

Das beschriebene Vorgehen wurde von Lacroix u.a. [4] für die EFGM vorgeschlagen. Eigene Untersuchungen haben jedoch gezeigt, dass der Erfolg der Methode stark von der numerischen Integration abhängt. Außerdem wurden noch keine Untersuchungen zur Anwendbarkeit der phasenangepassten Ansatzfunktionen auf die RPIM durchgeführt.

## Numerische Untersuchungen

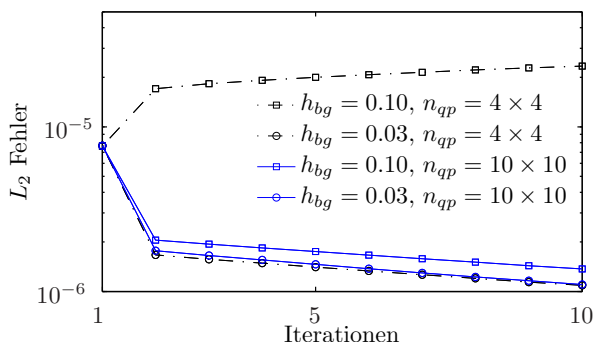
Im Folgenden werden die iterativen Methoden sowie die FEM auf ein analytisch lösbares Beispiel angewendet. Gegeben ist ein quadratisches Gebiet der Länge  $L = 1$  m, in dem sich eine ebene Welle unter einem Winkel  $\beta = 20^\circ$  ausbreitet. Da ein Vergleich mit der analytischen Lösung möglich ist, wird jeweils der  $L_2$ -Fehler angegeben.

In Bild 1 ist der Fehler der iterativen Verfahren im Vergleich zur FEM für die Wellenzahl  $k = 1 \frac{1}{\text{m}}$  und den Feldpunktabstand  $h_{fp} = 0.1$  m dargestellt. In der ersten Iteration (herkömmliche Methode) beträgt der Fehler der EFGM 0.4%, der Fehler der RPIM 18% des Fehlers der FEM. In den weiteren Iterationen (phasenangepasste Ansatzfunktionen) kann der Fehler der EFGM deutlich, der Fehler der RPIM jedoch nur unwesentlich reduziert werden. Den größten Gewinn liefert dabei bereits die zweite Iteration.



**Bild 1:**  $L_2$ -Fehler der RPIM, EFGM und FEM für  $k = 1 \frac{1}{\text{m}}$  und  $h_{fp} = 0.1$  m.

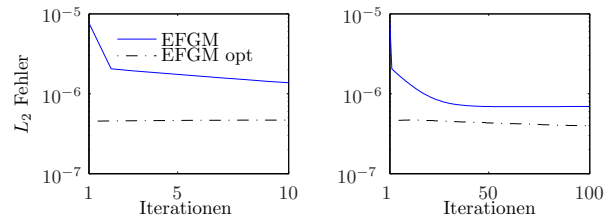
Bild 2 zeigt den Einfluss unterschiedlicher Integrationsgitter auf den  $L_2$ -Fehler. Es wurde sowohl die Gitterweite  $h_{bg}$  als auch die Anzahl der Integrationspunkte  $n_{qp}$  pro Integrationszelle variiert. Die Qualität der Lösung ist bei der EFGM sehr stark von der Genauigkeit der numerischen Integration abhängig. Bei der RPIM (hier nicht dargestellt) hat die Integration nur einen sehr geringen Einfluss auf den Fehler.



**Bild 2:**  $L_2$ -Fehler bei unterschiedlichen Integrationsgittern für  $k = 1 \frac{1}{\text{m}}$  und  $h_{fp} = 0.1$  m.

Da für das gegebene Beispiel die analytische Lösung bekannt ist, kann die Phase  $\theta_{ex}(x, y)$  an jedem Punkt exakt berechnet werden. Die hiermit konstruierten Ansatzfunktionen interpolieren den Schalldruck im Rahmen der

Rechengenauigkeit exakt. Werden diese Ansatzfunktionen in die schwache Form der Helmholtz Gleichung eingesetzt, so hat die Güte der numerischen Integration einen erheblichen Einfluss auf die Qualität der Lösung. In Bild 3 wird die mit  $\theta_{ex}$  berechnete EFGM (EFGM opt) mit dem iterativen Verfahren verglichen. Der  $L_2$ -Fehler erreicht dabei in der ersten Iteration einen Wert von  $4 \cdot 10^{-7}$ . Wird mit diesem Startwert weitergerechnet, so kann der  $L_2$ -Fehler in den weiteren Iterationen aufgrund numerischer Instabilitäten schwanken. Die herkömmliche EFGM konvergiert gegen den Grenzwert  $7 \cdot 10^{-7}$ , bleibt also in einem lokalen Optimum stecken.



**Bild 3:**  $L_2$ -Fehler der EFGM und der optimalen EFGM bei  $k = 1 \frac{1}{\text{m}}$ ,  $h_{fp} = h_{bg} = 0.1$  m und  $n_{qp} = 10 \times 10$ .

## Zusammenfassung

Für das untersuchte Beispiel liefern sowohl die RPIM als auch die EFGM bei vergleichbarer Diskretisierung einen deutlich kleineren  $L_2$ -Fehler als die FEM. Die iterative Methode verbessert dieses Ergebnis nochmal erheblich. Allerdings kann eine ungünstige Wahl des Integrationsgitters dazu führen, dass die iterative EFGM das Ergebnis der herkömmlichen EFGM verschlechtert. Das Integrationsgitter hat bei der EFGM einen starken Einfluss auf die Güte der Lösung, bei der RPIM ist nur ein geringer Einfluss festzustellen.

Um die iterativen Methoden für praktische Anwendungen tauglich zu machen, sind weitere Untersuchungen notwendig, insbesondere muss der Einfluss der Rechengenauigkeit untersucht und eine Rechenzeitanalyse im Vergleich zur FEM durchgeführt werden.

## Literatur

- [1] Suleau, S., Deraemaeker, A., Bouillard, P.: Dispersion and pollution of meshless solutions for the Helmholtz equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **190**(5), (2000), 639–657
- [2] Wenterodt, C., von Estorff, O.: Dispersion analysis of the meshfree radial point interpolation method for the Helmholtz equation. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **77**(12), (2009), 1670–1689
- [3] Liu, G.R.: *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*. CRC Press, Boca Raton, 2003
- [4] Lacroix, V., Bouillard, P., Villon, P.: An iterative defect-correction type meshless method for acoustics. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **57**(2), (2003), 2131–2146