Ein adaptives hybrides Verfahren zur Modellordnungsreduktion von dynamischen Systemen im Frequenzbereich

Christopher Blech[1], Harikrishnan K. Sreekumar[1], Ulrich Römer[2], Matthias Bollhöfer[3], Sabine C. Langer[1]

[1] *Institut für Akustik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: c.blech@tu-braunschweig.de*

[2] *Institut für Dynamik und Schwingungen, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: u.roemer@tu-braunschweig.de*

[3] *Institut für Numerische Mathematik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: m.bollhoefer@tu-bs.de*

Einleitung

Mechanische Modelle von abgeschlossenen vibroakustischen Systemen werden häufig im Frequenzbereich formuliert und mit Hilfe der Finite Elemente Methode (FEM) diskretisiert. Insbesondere für Parameterstudien im Rahmen von Unsicherheitsanalysen, Sensitivitätsstudien oder Optimierungen müssen die linearen Gleichungssysteme wiederholt gelöst werden. Ein typisches vibroakustisches System unter der Annahme von Strukturdämpfung beinhaltet die komplexe Steifigkeitsmatrix K sowie die Massenmatrix M, was eine Form nach Gleichung (1) mit Abhängigkeiten von dem Parametervektor p und der Frequenz $\omega = 2\pi f$ ergibt.

$$(K(p) - \omega^2 M(p))x(\omega, p) = F \tag{1}$$

In der Gleichung stellen F die Anregung und x die Systemantwort dar. Mit steigender Frequenz ω sinken die Wellenlängen, womit feinere Diskretisierungen im Rahmen der FEM erforderlich sind, die wiederum zu Systemen mit mehreren 10 Millionen Freiheitsgraden führen können. Als Beispiele seien Flugzeugrümpfe und Automobilkarosserien genannt. Neben der Herausforderung, große Gleichungssysteme wiederholt zu lösen, sind vibroakustische Systeme aufgrund der verschiedenartigen mechanischen Gebiete (Struktur / Akustik) oft schlecht konditioniert, wodurch bei iterativen Lösungsverfahren Konvergenzprobleme und Instabilitäten auftreten können. Die Lösung des Originalmodells in der Gesamtdimension aus Frequenzbereich Ω und Parameterbereich Γ führt aufgrund der mit der Parameteranzahl N_p exponentiell steigenden nötigen Stützstellen (Fluch der Dimensionalität) zu einem unangemessenen Rechenaufwand. Entsprechend ist die Anwendung von Ersatzmodellen oder Modellen reduzierter Ordnung unerlässlich.

Datenfitting und Projektionsmethoden

Die Ableitung eines reduzierten Modells lässt sich neben einer physikalisch motivierten Bildung eines alternativen Modells im wesentlichen mit zwei Ansätzen realisieren: Datengetrieben unter Regression/Interpolation von Systeminformationen an Parameterstützstellen oder Projektionsbasiert mittels Reduktion der Originalsystemmatrizen [4]. Für die Abbildung der Systemantwort über den Frequenzbereich Ω stellen insbesondere Resonanzen in vibroakustischen System eine Herausforderung für datengetriebene Verfahren dar. In den letzten Jahren hat sich eine besondere Eignung von Krylov-Unterraum Methoden für dynamische Systeme nach Gleichung (1) gezeigt. Dabei werden die originalen mechanischen Formulierungen auf reduzierte Systemmatrizen projiziert, die eine signifikant kleinere Anzahl an Freiheitsgraden umfassen [2, 3] und damit in einem Bruchteil der Rechenzeit lösbar sind. Mit Hilfe einer Projektionsmatrix V wird die reduzierte Systemantwort x_r nach Gleichung (2) abgebildet.

$$x_r = Vx \tag{2}$$

Die Spalten von V spannen den rationalen Krylov-Unterraum so auf, dass an fest gewählten Entwicklungspunkten ω_j die Koeffizienten einer Taylerreihenentwicklung übereinstimmen (Momentenabgleich). Die Orthogonalität der Basisvektoren in V wird über die rationale Arnoldi Methode basierend auf dem modifiziertem Gram Schmidt Verfahren sichergestellt [5]. Eine Steigerung der Ordnung r, also der Anzahl der übereinstimmenden Koeffizienten an ω_j, führt zu geringeren Fehlern des reduzierten Modells [4]. Mit V lassen sich reduzierte Matrizen M_r, K_r, F_r ableiten, welche das reduzierte Modell (ROM) darstellen. Die Eignung von rationalen Krylov-Unterräumen zur Abbildung von großen Parameterräumen (pROM, $N_p > 10$) mit globalen Basisvektoren für $\Omega \cup \Gamma$ ist allerdings ebenfalls durch den Fluch der Dimensionalität begrenzt. Zusätzlich doppeln sich Informationen in den lokalen Basen, was spezielle Maßnahmen erfordert (z.B. Singulärwert-Zerlegung SVD).

Für eine Approximation über den Parameterbereich Γ unter Annahme von vielen Parametern ($N_p > 10$) stellen datengetriebene Ansätze eine bessere Option dar. Eine Interpolation oder Regression über Γ konvergiert meist schneller als ein klassisches Monte Carlo Sampling (z.B. für eine Unsicherheitsquantifizierung), wenn der Verlauf der Übertragungsfunktionen über Γ glatt genug und der Parameterraum klein genug sind [6]. Um auch große Parameterräume behandeln zu können, müssen für die Approximation in vibroakustischen Systemen oft vorhandene anisotrope Eigenschaften ausgenutzt werden, um die zu untersuchenden Parameterstützstellen signifikant zu reduzieren und den Fluch der Dimensionalität zu umgehen. In den letzten Jahren wurden adaptive Verfahren zur Abbildung hochdimensionaler Probleme unter Ausnutzung von Anisotropien untersucht, z.B. in [7, 9, 8]. Die Stützstellen werden unter Berücksichtigung verschiedener Parameterdimensionen nacheinander erhöht, wobei

die hierarchische Konstruktion der dünnbesetzten Gitter oft nach Clenshaw-Curtis oder Leja erfolgt [9].

Motiviert durch die genannten Nachteile der MOR in Γ und der Polynominterpolation in Ω, können Polynome auf dünnbesetzten Gittern genutzt werden, um die lokalen Informationen des ROMs über Γ zu interpolieren. Dabei stehen an jeder Parameterstützstelle die lokalen Daten a) der Basisvektoren, b) der reduzierten Matrizen oder c) der Übertragungsfunktionen zur Auswahl [4]. Die Flexibilität des Verfahrens motiviert wiederum Option c), welche in diesem Beitrag fokussiert wird. Das nachfolgende vorgestellte adaptive hybride Verfahren zur parametrischen Modellordnungsreduktion stammt aus [1].

Adaptives hybrides Verfahren

Zur Modellordnungsreduktion über $\Omega \cup \Gamma$ wird ein Momentenabgleich an jedem Trainingspunkt p_l in Γ durchgeführt, um die reduzierte Systemantwort x_r im projizierten rationalen Krylov-Unterraum zu erhalten. Für die Orthogonalisierung in V ist die oben beschriebene Arnoldi-Methode implementiert (rational Arnoldi method rA). Sämtliche Trainingspunkte in Γ werden zunächst unabhängig voneinander behandelt, wobei p_l ein einzelner gewählter Parametervektor (Trainingspunkt) in einem zuvor festgelegten Leja-Gitter darstellt. Die Systemantwort im reduzierten Raum wird auf den gesamten Lösungsraum projiziert $x_{V;r}$ und mit Hilfe von Polynomen über Γ interpoliert. Die Interpolation ist auf dünnbesetzten Gittern implementiert (sparse grid SG), sodass glatte Bereiche ausgenutzt werden können und Trainingspunkte gezielt gewählt werden können. Gleichung (3) stellt die Gesamtapproximation $\tilde{x}_{V;r}$ über $\Omega \cup \Gamma$ dar und bildet mittels hierarchischer Polynome in H_l und den Koeffizienten in α_l die Systemantworten im Parameterraum ab (sparse grid rational Arnoldi method SGrA).

$$\tilde{x}_{V;r}(\omega, p) = \sum_{l=1}^{n_{t;p}} \alpha_l(x_{V;r}(\omega, p_l)) H_l(p) \tag{3}$$

Die Adaptivität des hybriden Verfahrens ist dabei sowohl in Ω über die Ordnung des Krylov-Unterraumes r als auch in Γ über die Anzahl an Trainingspunkten $n_{t;p}$ implementiert und wird durch duale Fehlerindikatoren gesteuert. Der Gesamtfehler wird dafür in die Anteile der einzelnen Methoden SG und rA zerlegt. Unter Nutzung der Adjungierten des reduzierten Modells z_r, sowie des reduzierten Modells der Adjungierten $z_{d;r}$ werden die punktweisen Fehlerschätzer in Gleichungen (4) und (5) abgeleitet.

$$\eta_{\mathrm{SG}} \approx | \underbrace{(V\tilde{z}_r)^H}_{\text{Adjungierte}} \underbrace{(F - AV\tilde{x}_r)}_{\text{Residuum}} | \tag{4}$$

$$\eta_{\mathrm{rA}} \approx | \underbrace{(V_d\tilde{z}_{d;r})^H}_{\text{Adjungierte}} \underbrace{(F - AV\tilde{x}_r)}_{\text{Residuum}} | \tag{5}$$

Zur Steigerung der Effizienz werden die beiden Fehlergrößen möglichst balanciert und $n_{t;p}$ bzw. r dem größeren Fehlerindikator entsprechend so lange erhöht, bis eine Konvergenz in den statistischen Größen (z.B. Mittelwert) erreicht wird. Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens und insbesondere die Herleitung der Fehlerindikatoren findet sich in [1].

Anwendung am vibroakustischen System

Zur Demonstration des vorgestellten adaptiven hybriden Verfahrens SGrA wird das generische vibroakustische System in Abbildung 1 betrachtet. Motiviert durch den Leichtbau in vielen Mobilitätsträgern wird ein 2D Mindlin-Plattengebiet Ω_p (grau, 5 mm Plattendicke, Abmessungen $1 \times 0{,}7\,\mathrm{m}^2$) mit einem Helmholtz-Akustikgebiet Ω_a (blau, Abmessungen $1 \times 0{,}7 \times 1{,}2\,\mathrm{m}^3$) gekoppelt. In Ω_p wird Stahl mit einem linear isotropen Materialmodell mit Strukturdämpfung modelliert (E-Modul $E = 210\mathrm{e}9\,\mathrm{N/m}^2$; Querkontraktionszahl $\nu = 0{,}3$; Dichte $\rho_p = 7850\,\mathrm{kg/m}^3$, Dämpfungsverlustfaktor $\eta = 0{,}01$) und der in Abbildung 1 gezeigte Knoten ist durch eine Punktkraft angeregt. Ω_a ist mit Luft gefüllt (Schallgeschwindigkeit $c = 340\,\mathrm{m/s}$; Dichte $\rho_a = 1{,}21\,\mathrm{kg/m}^3$) und die Systemantwort wird im Frequenzbereich berechnet. Dafür sind beide Gebiete mit finiten Elementen diskretisiert, wobei 9-Knoten Viereckelemente für Ω_p und 27-Knoten Hexaederelemente für Ω_a genutzt werden. Die Gesamtgröße umfasst 9450 Freiheitsgrade. Als Zielgröße wird der Schalldruck an dem zur Punktkraft koinzidenten Knoten im Akustikgebiet ausgewertet. Beispielhaft soll der interessierende Frequenzbereich zwischen 100 und 300 Hz (Frequenzauflösung $\Delta f = 1\,\mathrm{Hz}$) liegen.

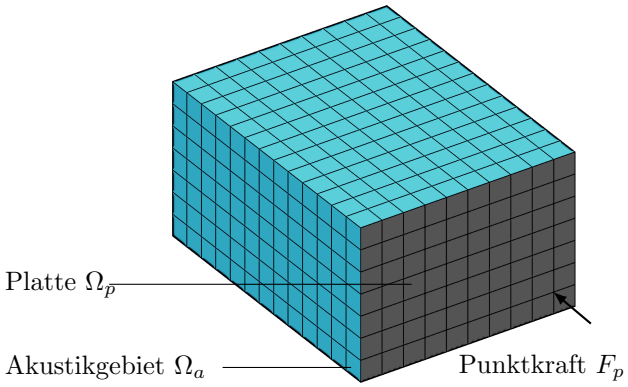

Abbildung 1: Vibroakustisches FE-Modell aus stark gekoppeltem Mindlin-Plattengebiet Ω_p (grau) und Akustikgebiet Ω_a (blau), angeregt durch Punktkraft F_p.

In Abbildung 2 ist die Antwort des Originalsystems mit Nominalwerten (Ref) am zur Punktkraft koinzidenten Knoten in Ω_a über der Frequenz gezeigt. Zum Vergleich wird das vorgestellte rationale Arnoldi-Verfahren mit verschiedenen Ordnungen angewendet, welche im hybriden Verfahren zur Fehlerreduktion in Ω genutzt werden. Die Entwicklungspunkte sind konstant an den Stellen $\bar{\Omega} = 2\pi\{100, 150, 200, 250, 300\}$ gesetzt und erlauben bereits ab einer Ordnung von $r = 10$ eine Abbildung mit Abweichungen lediglich im oberen Frequenzbereich, wohingegen bei $r = 5$ übereinstimmenden Koeffizienten ein signifikanter Fehler in weiten Teilen des Frequenzbereichs vorliegt. Ab einer Ordnung von $r = 20$ wird das Originalmodells hervorragend approximiert, sodass für das hybride Verfahren ein sinnvoller Wertebereich von

$r = 5 - 20$ festgestellt wird.

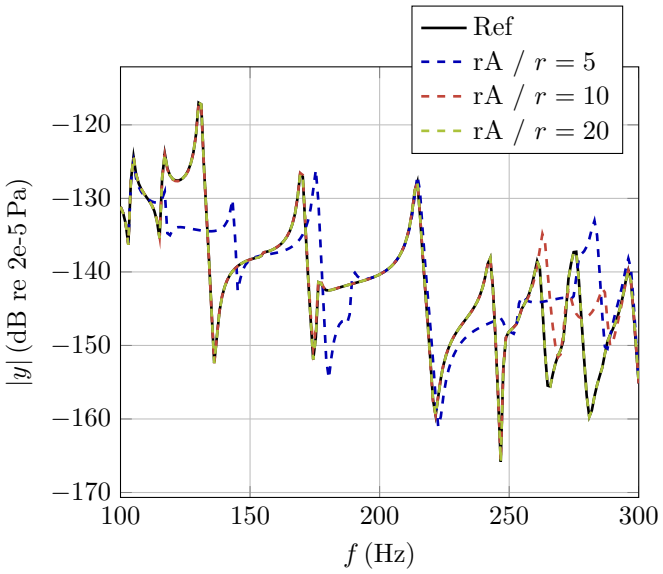

Abbildung 2: Frequenzantwort des vibroakustischen Systems (Nominalwerte) für verschiedene Ordnungen der Modellordnungsreduktion (rA / $r = 5/10/100$) im Vergleich mit der Lösung des Originalmodells (Ref).

Beispielhaft seien nun ein 2D-Raum Γ durch die Parameter E_p (E-Modul in Ω_p) und c_a (Schallgeschwindigkeit in Ω_a) aufgespannt. Es wird eine Gleichverteilung angenommen, wobei der Strukturparameter mit $\pm 10\,\%$ und der Akustikparameter mit $2{,}5\,\%$ variabel ist. Die Wahl der Bereiche ist durch eine meist genauere Kenntnis der Schallgeschwindigkeit begründet. Zudem führen diese Bereiche zu Effekten ähnlicher Größenordnung in den Frequenzantworten. Neben den konvergierten Mittelwerten einer Monte-Carlo Simulation ($n_{\mathrm{MC}} = 500$ Auswertungen in Γ) auf dem Originalmodell werden in Abbildung 3 die Ergebnisse des SGrA Algorithmus gezeigt. Letzterer wird mit 10 und 20 Trainingspunkten in Γ ausgeführt, um das damit erhaltene reduzierte Modell ebenfalls für eine Monte Carlo Simulation anzuwenden ($n_{\mathrm{MC}} = 1\mathrm{e}5$ Auswertungen in Γ) und Mittelwerte abzuleiten. 1e5 Auswertungen auf dem reduzierten Modell dauern dabei auf dem genutzten Rechner knapp eine Minute, wohingegen eine einzelne Lösung des Originalmodells ähnliche zeitliche Kosten hat. Insofern können, wie in Abbildung 3 angegeben, die LU Zerlegungen des Originalsystems alleinig als Kostenschätzer angesetzt werden. In Abbildung 3 ist deutlich zu sehen, dass das SGrA Modell mit $n_{t;p} = 20$ Trainingspunkten bereits eine sehr gute Näherung der Mittelwerte im Vergleich zum Originalmodell erzielt.

Wie eingangs motiviert, können Sensivitätsanalysen einzelner Parameter im Designprozess hilfreich sein, um Modelle zu validieren oder direkt Ansatzpunkte für Produktverbesserungen abzuleiten. Für eine qualitative Bewertung globaler Sensitivitäten sind in Abbildung 4 in den oberen beiden Diagrammen zunächst 10 zufällige Beispielkurven unter Variation der einzelnen Parameter E_p und c_a geplottet. Unter alleiniger Variation des E-Modul ist in wenigen Frequenzbereichen (z.B. $< 125\,\mathrm{Hz}$) eine deutliche Veränderung der Systemantwort erkennbar.

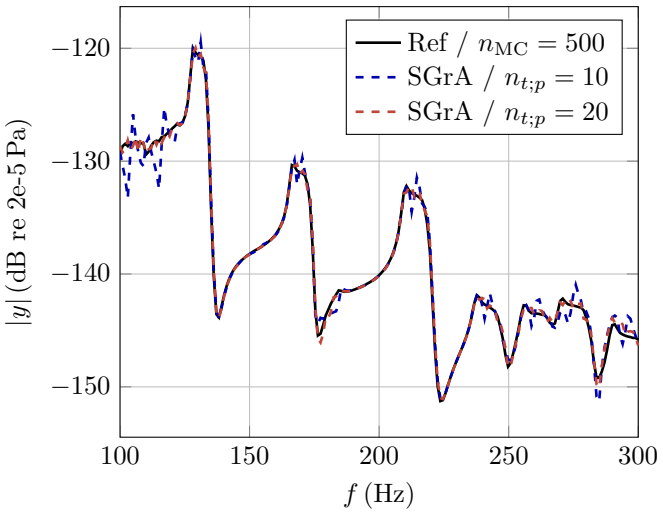

Abbildung 3: Mittelwerte der Systemantwort als Ergebnis einer Monte Carlo Analyse mit $n_{\mathrm{MC}} = 1e5$ ausgewertet auf dem Originalmodell (Ref $n_{\mathrm{MC}} = 250$) und dem mittels SGrA reduzierten System verschiedener Ordnung (SGrA $n_{t;p} = 10/20$).

Dahingegen hat die Schallgeschwindigkeit einen sichtbaren Einfluss im gesamten Frequenzbereich oberhalb von 125 Hz, da der Antwortpunkt in Ω_a liegt und die Raumresonanzen dominieren. Im unteren Diagramm von Abbildung 4 sind die Erste Ordnung Sobol Indizes der beiden Parameter dargestellt. Die Datenbasis entspricht dabei dem konvergierten SGrA-Modell mit 20 Trainingspunkten aus Abbildung 3. Über weite Teile des Frequenzbereichs wird eine hohe Sensitivität der Systemantwort auf c_a aufgezeigt, was zu den qualitativen Beobachtungen passt. Die im ersten Diagramm auffälligen Bereiche, in denen E_p einen Einfluss auf die Systemantwort zeigt, werden ebenfalls durch die Sobol Indizes deutlich. Anhand des Beispielsystems wird damit gezeigt, dass sowohl der Mittelwert als auch Sobol Indizes mit dem SGrA Modell in einem Bruchteil der Zeit abgeleitet werden können.

Zusammenfassung und Ausblick

In dem Beitrag wird ein adaptives hybrides Verfahren aus [1] vorgestellt, bei dem ein Momentenabgleich (rationale Arnoldi Methode) im Frequenzbereich Ω und eine Polynominterpolation der Übertragungsfunktionen auf dünnbesetzten Gittern im Parameterraum Γ verbunden werden. Kleine Fehler im gesamten hybriden reduzierten Modell über $\Omega \cup \Gamma$ werden über die Ordnung der lokalen ROMs an Parameterstützstellen sowie über die Stützstellenanzahl selbst erzielt. Dabei wird die Adaptivität des Verfahrens durch durch duale Fehlerindikatoren eingeführt.

Anhand eines numerischen vibroakustischen Demonstrators – einer Plattenstruktur gekoppelt mit einem Akustikgebiet – wird die Effizienz des hybriden Verfahrens gegenüber einer Monte Carlo Simulation gezeigt. Durch die Approximation des 2D Parameterbereichs mittels Polynomen und adaptiver Stützstellenwahl können Mittelwerte und globale Sensitivitäten für das gezeigte Beispiel an einem Auswertepunkt in einem Bruchteil der sonst

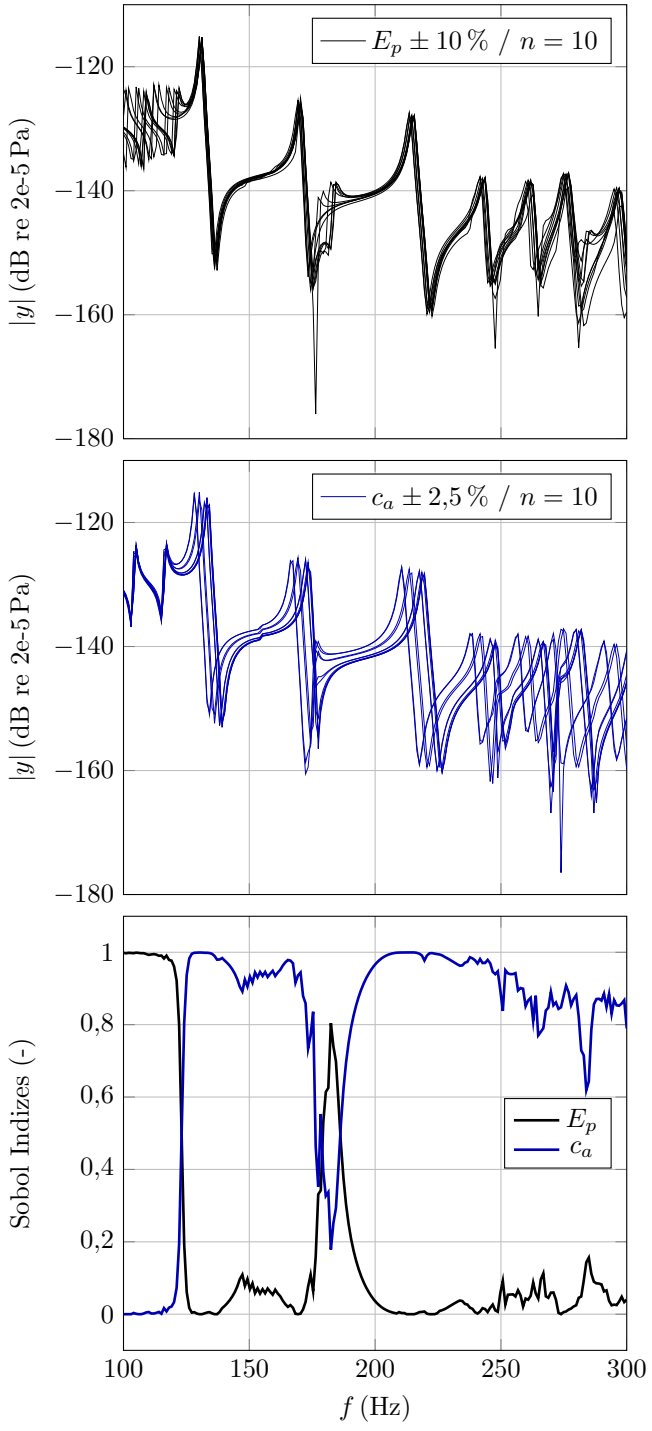

Abbildung 4: Oben und Mitte: 10 zufällige Systemantworten für $E_p \pm 10\,\%$ und $c_a \pm 2{,}5\,\%$; Unten: Sobol Indizes als Ergebnis der globalen Sensitivitätsanalyse mit $n_{\mathrm{MC}} = 1e5$ ausgewertet auf dem mittels SGrA reduzierten System mit $n_{t;p} = 20$

üblichen Zeit berechnet werden. Auch für eine größere Parameteranzahl wird aufgrund dünnbesetzter Gitter zur Berücksichtigung glatter Bereiche und Anisotropien eine hohe Effizienz erwartet (siehe [1] für $N_p = 6$).

Zukünftige Themen stellen Erweiterungen des Verfahrens (Umfassende adaptive Auswahl der Entwicklungspunkte in Ω, Berücksichtigung verschiedener FE-Netze, Recycling von LU-Zerlegungen) sowie Tests zur Skalierbarkeit des Verfahrens (Große Modelle auf parallelen Rechnern, große Parameteranzahl) dar.

Danksagung

Die Autoren danken der Deutsche Forschungsgemeinschaft für die Förderung des Exzellenzclusters SE^{2}A - Sustainable and Energy-Efficient Aviation, in welchem Teile dieser Arbeiten entstanden sind.

Literatur

[1] Römer, U., Bollhöfer, M., Sreekumar, H. K., Blech, C. & Langer, S. C.: An adaptive sparse grid rational Arnoldi method for uncertainty quantification of dynamical systems in the frequency domain. Int J Numer Methods Eng. 2021; 1-25. https://doi.org/10.1002/nme.6761

[2] Nouy, A.: Low-rank tensor methods for model order reduction. arXiv preprint 2015; arXiv:1511.01555.

[3] Bai, Z.: Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. Applied numerical mathematics 2002; 43(1-2), 9-44.

[4] Benner, P., Gugercin, S. & Willcox, K.: A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems. SIAM review 2015; 57(4), 483-531.

[5] Bai, Z. & Su, Y.: Dimension reduction of large-scale second-order dynamical systems via a second-order Arnoldi method. SIAM Journal on Scientific Computing 2005; 26(5), 1692-1709.

[6] Xiu, D., Karniadakis, G. E.: Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. Journal of computational physics 2003; 187(1), 137-167.

[7] Gerstner, T. & Griebel, M.: Dimension adaptive tensor product quadrature. Computing 2003; 71(1), 65-87.

[8] Chkifa, A., Cohen, A. & Schwab, C.: High-dimensional adaptive sparse polynomial interpolation and applications to parametric PDEs. Foundations of Computational Mathematics 2014; 14(4), 601-633.

[9] Narayan, A. & Jakeman, J. D.: Adaptive Leja sparse grid constructions for stochastic collocation and high-dimensional approximation. SIAM Journal on Scientific Computing 2014; 36(6), A2952-A2983.