Das Schallfeld einer sich bewegenden und ein beliebiges Zeitsignal abstrahlenden Linienquelle über absorbierendem Boden

Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: piscoya@beuth-hochschule.de

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit wurde eine analytische Formel für die Impulsantwort einer ruhenden Linienquelle über einem unendlich ausgedehnten, flachen Boden mit rein reeller, konstanter Impedanz hergeleitet. Der Schalldruck einer Linienquelle, die ein beliebiges Zeitsignal abstrahlt, kann durch Faltung des Zeitsignals mit der Impulsantwort berechnet werden. Die Lösung wird als ein Integral angegeben, das im Allgemeinen numerisch ausgewertet werden muss. In der vorliegenden Arbeit wird die Schallabstrahlung einer Linienquelle bestimmt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit über und parallel zum Boden bewegt und dabei ein beliebiges Zeitsignal abstrahlt. Um die Richtigkeit des erhaltenen Ausdrucks zu überprüfen, wird eine monofrequent abstrahlende Linienquelle berechnet und mit der von Dragna und Blanc-Benon angegebenen Lösung für diesen Spezialfall verglichen. Aufgrund des oszillatorischen und unendlichen Charakters des harmonischen Zeitsignals müssen die auftretenden Integrale durch eine Verschiebung des Integrationspfades in die komplexe Ebene regularisiert werden. Als ein konkretes Anwendungsbeispiel wird eine Linienquelle simuliert, die eine Folge von Gaußschen Impulsen abstrahlt.

2. Impulsantwort der stationären Linienquelle über Impedanzboden

Die Impulsantwort der stationären Linienquelle über einen Impedanzboden bezeichnen wir als die Funktion g

$$g(\vec{r}, t; \vec{r}_q, t_q) \tag{1}$$

wobei $\vec{r}$ die Empfängerposition, t die Empfangszeit, $\vec{r}_q$ die Position der Quelle und t_q die Emissionszeit sind.

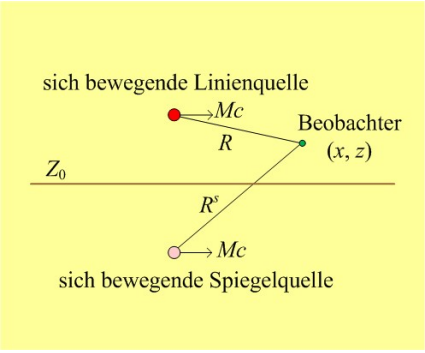

Abbildung 1: Geometrie des Problems

Wir schreiben die Impulsantwort als eine Summe von drei Komponenten: der Direktschall g_1, die Spiegelreflexion g_2 und ein Korrekturterm σ, der den Unterschied zwischen einem schallharten und einem absorbierenden Boden bezüglich der Schallreflexion berücksichtigt [1]:

$$g = g_1 + g_2 + \sigma \tag{2}$$

Der Direktschall und die Spiegelreflektion sind wohl bekannt

$$g_1 = \frac{c}{2\pi} \frac{H\left(t-t_q-\frac{1}{c}\sqrt{(x-x_q)^2+(z-h)^2}\right)}{\sqrt{c^2(t-t_q)^2-(x-x_q)^2-(z-h)^2}} \tag{3}$$

$$g_2 = \frac{c}{2\pi} \frac{H\left(t-t_q-\frac{1}{c}\sqrt{(x-x_q)^2+(z+h)^2}\right)}{\sqrt{c^2(t-t_q)^2-(x-x_q)^2-(z+h)^2}} \tag{4}$$

wobei H die Heaviside-Funktion ist, und der Korrekturterm lautet:

$$\sigma = -\frac{c}{\pi} \frac{H\left(t-t_q-\frac{1}{c}\sqrt{(x-x_q)^2+(z+h)^2}\right)}{\sqrt{c^2(t-t_q)^2-(x-x_q)^2-(z+h)^2}} \times \frac{Z_0 c(t-t_q) z_h + z_h^2 + (x-x_q)^2}{(Z_0 c(t-t_q)+z_h)^2 + (1-Z_0^2)(x-x_q)^2} \tag{5}$$

mit $z_h = z + h$ und $Z_0 = Z/\rho c$. Z ist die reelle und frequenzunabhängige Impedanz, die den Boden charakterisiert.

3. Bewegte Linienquelle mit allgemeiner Zeitabhängigkeit

Die Linienquelle wird durch die Quellfunktion $Q(\vec{r}, t)$ beschrieben. Der Schalldruck wird dann mittels der Greenschen Methode durch Integration der Quellfunktion und der Impulsantwort gewonnen [2]

$$p(\vec{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\vec{\varepsilon}, \tau) g(\vec{r}, t; \vec{\varepsilon}, \tau) d\tau d^3\varepsilon \tag{6}$$

Da die Quellfunktion von der Position und Zeit abhängt, integriert man über die Position der Quelle $\vec{\varepsilon}$ und die Emissionszeit τ. Für unseren spezifischen Fall, in dem sich die Quelle mit konstanter Geschwindigkeit $v = Mc$ ($M =$ Machzahl) parallel zum Boden in der Höhe h bewegt, beschreibt man die Bewegung mit einer Delta-Funktion und die zeitabhängige Amplitude mit der Faktor $q(t)$

$$Q(\vec{r}, t) = q(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \ , \vec{r}_q(t) = [0, h] + [Mc, 0]t \tag{7}$$

Man setzt dann die Quellfunktion in das Integral (6) ein. Wegen der Delta-Funktion bleibt nur die Integration über die Emissionszeit τ auszuführen:

$$p(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau) g(\vec{r}, t; \vec{r}_q(\tau), \tau) d\tau \tag{8}$$

Daher wird sowohl der Schalldruck als auch die Impulsantwort als eine Summe von drei Komponenten

dargestellt, nämlich durch den Direktschall p_1, die Spiegelreflexion p_2 und den Korrekturterm p_3.

$$p = p_1 + p_2 + p_3$$

Die drei Komponenten sind explicit gegeben durch

$$p_1 = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau)\frac{H\left(t-\tau-\frac{1}{c}\sqrt{(x-Mc\tau)^2+(z-h)^2}\right)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-(x-Mc\tau)^2-(z-h)^2}}d\tau \quad (9)$$

$$p_2 = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau)\frac{H\left(t-\tau-\frac{1}{c}\sqrt{(x-Mc\tau)^2+(z+h)^2}\right)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-(x-Mc\tau)^2-(z+h)^2}}d\tau \quad (10)$$

$$p_3 = -\frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau)\frac{H\left(t-\tau-\frac{1}{c}\sqrt{(x-Mc\ )^2+(z+h)^2}\right)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-(x-Mc\tau)^2-(z+h)^2}}\times$$

$$\frac{Z_0 c(t-\tau)z_h+z_h^2+(x-Mc\ )^2}{(Z_0 c(t-\tau)+z_h)^2+(1-Z_0^2)(x-Mc\tau)^2}d\tau \quad (11)$$

Die unteren Grenzen der Integrale werden durch die Heaviside-Funktion bestimmt. Dafür muss man den Wert von τ, der das Argument der Heaviside-Funktion zu Null setzt, bestimmen.

Wir führen einen Variablenwechsel durch, der die inverse Lorentz-Transformation verwendet, um die weiteren Berechnungen zu erleichtern:

$$t = t_L + \frac{M}{c}x_L\ ,\ x = x_L + Mct_L\ ,\ z = \frac{z_L}{\gamma}\ ,\ h = \frac{h_L}{\gamma} \quad (12)$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$. Das Argument der Heaviside-Funktion ist dann Null für folgende Werte von τ

$$\tau_\pm = t_L - \frac{\rho_L(\pm h_L)}{c}\ ,\ \ \rho_L(\eta) = \sqrt{x_L^2+(z_L-\eta)^2} \quad (13)$$

und die Quadratwurzeln vereinfachen sich zu

$$\sqrt{c^2(t-\tau_\pm)^2-(x-Mc\tau_\pm)^2-(z\mp h)^2} =$$

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{c^2(t_L-\tau_\pm)^2-\rho_L^2(\pm h_L)} \quad (14)$$

Schließlich wechseln wir von $(t_L-\tau)$ zu τ und erhalten damit für die Ausdrücke der drei Komponenten.

$$p_1 = \frac{\gamma c}{2\pi}\int_{\rho_L(h_L)/c}^{+\infty}\frac{q(t_L-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-\rho_L^2(h_L)}}d\tau \quad (15)$$

$$p_2 = \frac{\gamma c}{2\pi}\int_{\rho_L(-h_L)/c}^{+\infty}\frac{q(t_L-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-\rho_L^2(-h_L)}}d\tau \quad (16)$$

$$p_3 = -\frac{\gamma c}{\pi}\int_{\rho_L(-h_L)/c}^{+\infty}\frac{q(t_L-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-\rho_L^2(-h_L)}}\times$$

$$\frac{\alpha^2(x_L+Mc\tau)^2+\alpha z_{hL}(Mx_L+c\tau)+\alpha^2 z_{hL}^2/\gamma^2}{\varepsilon^2(c\tau+\alpha\nu/\varepsilon^2)^2+(\alpha^2-\varepsilon^2)^2\rho_L^2(-h_L)+\nu^2(1-\alpha^2/\varepsilon^2)}d\tau \quad (17)$$

mit $z_{hL} = z_L + h_L$, $\nu = \alpha M x_L + z_{hL}$, $\varepsilon = \sqrt{1+\alpha^2M^2}$ und $\alpha = \gamma/Z_0$

Wir bekommen dann für die Komponente des Schalldruckes Faltungsintegrale. Der letzte Schritt wäre die Rücktransformation zu den physikalischen Variablen $\vec{r}$ und t, aber die Lorentz-Variablen ergeben eine kompaktere Schreibweise der Formel. Deswegen ersparen wir uns diesen Schritt.

4. Beispiel zur Verifizierung: Die harmonische Linienquelle

Wir wollen unsere Lösung überprüfen. Dafür verwenden wir die Lösung einer harmonisch bewegten Linienquelle von Dragna und Blanc-Benon [3]. Die Autoren führen eine räumliche Fourier-Transformation und eine Lorentz-Transformation durch und erhalten die folgende Lösung.

$$p_1 = \frac{j\gamma}{4}H_0^{(1)}(k\rho_L(h_L))e^{-j\omega t_L} \quad (18)$$

$$p_2 = \frac{j\gamma}{4}H_0^{(1)}(k\rho_L(-h_L))e^{-j\omega t_L} \quad (19)$$

$$p_3 = \frac{j\gamma}{2\pi}e^{-j\omega t_L}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\lambda\ L}e^{j\sqrt{k^2-\lambda^2}z_{hL}}}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}\frac{\alpha(k+\lambda M)d\lambda}{\sqrt{k^2-\lambda^2}+(k+\lambda M)\alpha} \quad (20)$$

wobei k die Wellenzahl ist. Das Integral hat zwei Singularitäten, nämlich bei $\lambda = k$ und bei $\lambda = -k$. Aber diese sind integrierbar. Das Integral ist konvergent, wenn man das geeignete Vorzeichen der Quadratwurzel wählt, da man einen Term mit exponentiellem Abfall erhält.

Die Formeln (15)-(17) sollten die gleiche Ergebnisse liefern wie die Ausdrücke (18)-(20) für $q(t) = e^{-j\omega t}$.

Wir untersuchen zuerst den Direktschall und die Spiegelreflexion. Der Variablenwechsel $\rho_L(\pm h_L)u = c\tau$ transformiert die Integrale auf die Gestalt:

$$p_{1,2} = \frac{j\gamma e^{-j\omega t_L}}{4}\left(\frac{2}{j\pi}\int_1^{+\infty}\frac{e^{jk\rho_L(\pm h_L)u}}{\sqrt{u^2-1}}du\right) \quad (21)$$

Die Ausdrucke in der Klammer sind eine Integralform der Hankel-Funktion nullter Ordnung. Daher sind die Formeln für Direktschall und Spiegelreflexion die gleichen Formeln wie diejenigen von Dragna und Blanc-Benon.

Für den Korrekturterm führt man den Variablenwechsel $\rho_L(-h_L)\cosh u = c\tau$ durch, und damit ergibt sich

$$p_3 = -\frac{\gamma e^{-j\omega t_L}}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{jk\ L(-h_L)\cosh u}\times$$

$$\frac{\alpha^2(x_L+M\rho_L(-h_L)\cosh u)^2+\alpha z_{hL}(Mx_L+\rho_L(-h_L)\cosh u)+\alpha^2 z_{hL}^2/\gamma^2}{\varepsilon^2(\rho_L(-h_L)\cosh u+\alpha\nu/\varepsilon^2)^2+(\alpha^2-\varepsilon^2)^2\rho_L^2(-h_L)+\nu^2(1-\alpha^2/\varepsilon^2)}du \quad (22)$$

Der zweite Term ist immer positiv und tendiert bei großen Werten von u zum konstanten Wert $(\alpha M/\varepsilon)^2$. Der erste Term ist bei steigendem u eine stark oszillierende Funktion. Wegen dieses Terms ist das Integral leider numerisch nicht konvergent.

Das Integral kann aber numerisch gelöst werden, wenn der Integrationspfad in die komplexe Ebene verschoben wird. Wir betrachten die geschlossene Kontur in der komplexen Ebene von u, die in Abb. 2 aufgezeichnet ist.

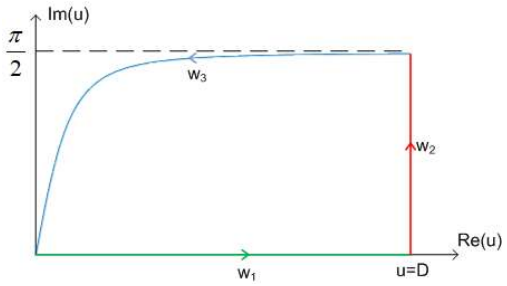

Abbildung 1: Kontur zur Aufwertung des Integrals (22)

Sie besteht aus den drei Pfaden w_1, w_2 und w_3. Der erste Pfad w_1 liegt auf der reellen Achse und u läuft von 0 bis D:

$$w_1: u = \eta + j0 \quad / \quad \eta \in [0, D]$$

Der zweite Pfad w_2 liegt parallel zur imaginären Achse mit $Re(u) = D$ und $Im(u)$ läuft von 0 bis $\pi/2$:

$$w_2: u = D + j\eta \quad / \quad \eta \in [0, \pi/2]$$

Der dritte Pfad ist eine parametrisierte Kurve in der komplexen Ebene:

$$w_3: u = \sinh\eta + j\frac{\pi}{2}\tanh\eta \quad / \quad \eta \in [0, \operatorname{asinh} D]$$

Diese Kurve wurde gewählt, weil sich auf ihr der $Im(u)$ schnell zum Wert $\pi/2$ tendiert, aber andere Kurven sind genauso möglich. Wenn wir den Integranden in (22) als f bezeichnen, lässt sich zeigen, dass f keine Singularität im Gebiet hat, der von der Kontur eingeschlossen ist. Deswegen ergibt sich nach dem Cauchyschen-Integralsatz, dass

$$\int_{w_1} f(u)du = -\int_{w_2} f(u)du - \int_{w_3} f(u)du \qquad (23)$$

Wenn die Werte von D gegen unendlich gehen, lässt sich zeigen, dass das Integral über den zweiten Pfad w_2 zu Null wird, d.h. der Korrekturterm lässt sich durch das Integral über den Pfad w_3 berechnen.

$$\lim_{D\to\infty} \int_{w_1} f(u)du = -\lim_{D\to\infty} \int_{w_3} f(u)du \qquad (24)$$

Und über den Pfad w_3 konvergiert das Integral.

Die Ergebnisse von (20) und (22) müssen gleich sein. Abb. 3 und 4 zeigen einen Vergleich der Ergebnisse beider Lösungen. Die Linienquelle bewegt sich mit einer Machzahl von 0.3 und strahlt bei einer Frequenz von 300 Hz ab. Zwei unterschiedliche Impedanzen wurden simuliert, $Z_0 = 0.5$ und $Z_0 = 1.5$. In beiden Abbildungen zeigt der erste Plot den relativen Fehler der Korrekturterm, und der zweite Plot zeigt den gesamten Schalldruck. In beiden Fällen liegt der Fehler um die 10^{-14}. Damit wurde die Richtigkeit unserer Formeln bestätigt.

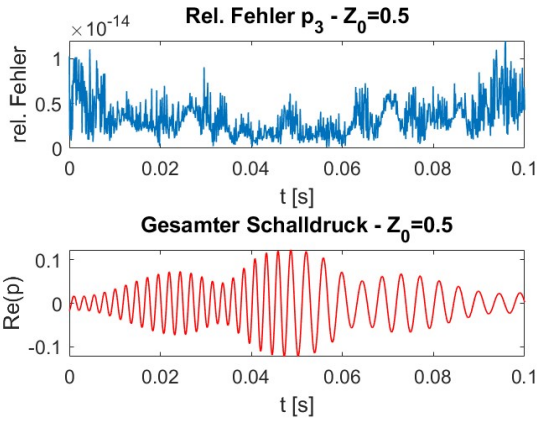

Abbildung 3: Vergleich der Lösungen bei $Z_0 = 0.5$

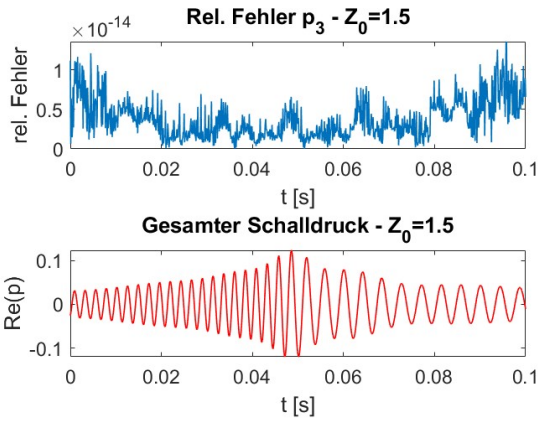

Abbildung 4: Vergleich der Lösungen bei $Z_0 = 1.5$

5. Anwendungsbeispiel 1: Rechteck-Impuls

Die hergeleiteten Formeln (15)-(17) sind geeignet für beliebige Zeitsignale, insbesondere für Signale mit einer endlichen Dauer. Wir haben den Schalldruck für einen rechteckigen Impuls berechnet.

Abb. 5 stellt die Ergebnisse dar. Der erste Plot zeigt die drei Komponenten: Direktschall, Spiegelreflexion und Korrekturterm und den gesamten Schalldruck für eine Machzahl von 0.25 und einen Boden mit einer Impedanz $Z_0 = 10$. Der zweite Plot zeigt den abgestrahlten Schalldruck, wenn die Linienquelle sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegt.

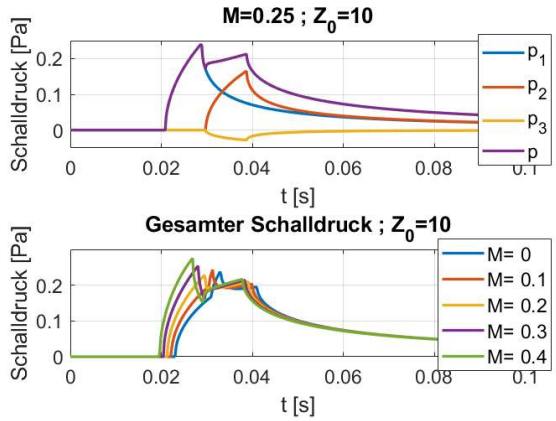

Abbildung 5: Schalldruck eines Rechteck-Impulses bei $Z_0 = 10$ und verschiedenen Machzahlen

6. Anwendungsbeispiel 2: Serie von Gauß-Impulsen

Als letztes Beispiel haben wir den Schalldruck einer sich bewegenden Linienquelle berechnet, die eine Serie von Gaußschen Impulsen emittiert. Die Quelle bewegt sich mit $M = 0.25$ auf der Höhe $h = 1.41$ m über einem Boden mit $Z_0 = 10$. In Abb. 6 ist der Schalldruck in vier Momenten der Bewegung dargestellt. Die Position des Mikrofons ist mit

einem weißen Kreis markiert. Abb. 7 plottet die Serie von Impulsen und Abb. 8 den Schalldruck beim Empfänger.

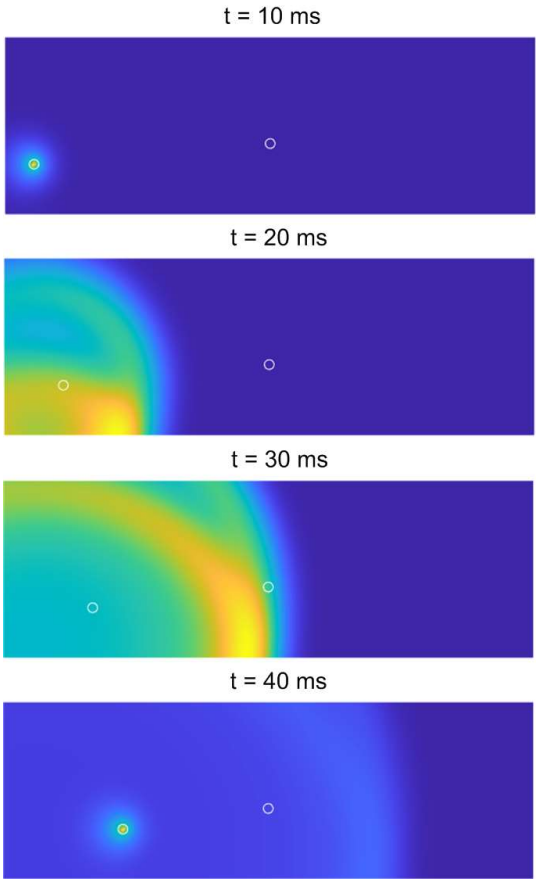

Abbildung 6: Schallabstrahlung der bewegten Linienquelle.

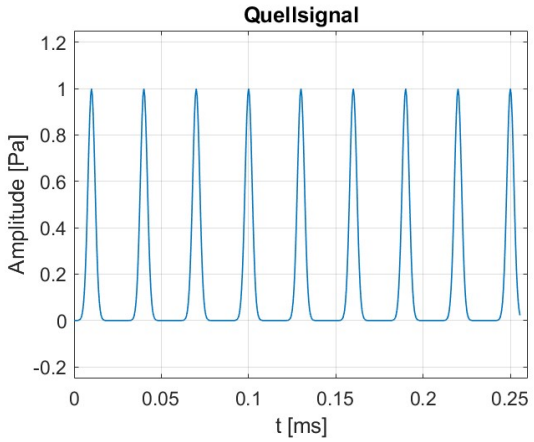

Abbildung 7: Serie von Gauß-Impulsen.

6. Zusammenfassung

Die Impulsantwort g einer stationären Linienquelle über einem reellen Impedanzboden besitzt eine geschlossene und einfache Formel. Man verwendet diese, um das Schallfeld einer mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegenden Linienquelle über einem Impedanzboden mit beliebiger Zeitabhängigkeit zu bestimmen. Der Schalldruck p lässt sich aus g mittels der Greenschen Methode durch die Einbeziehung der Bewegung in der Quellfunktion herleiten. Der so gewonnene Schalldruck kann als die Summe von Direktschall, Spiegelreflexion und Korrekturterm ausgedrückt werden. Jeder Term lässt sich als ein Faltungsintegral darstellen und wird im Allgemeinen numerisch berechnet.

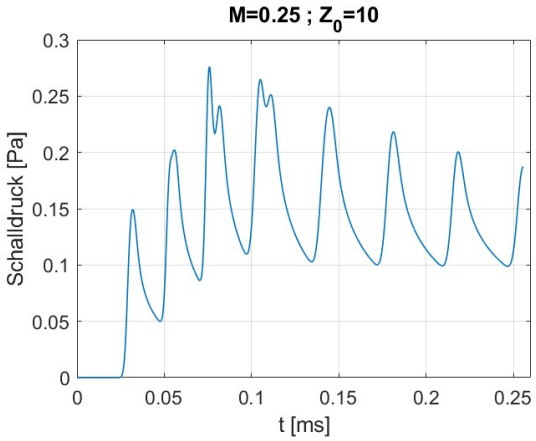

Abbildung 8: Schalldruck am Mikrofon.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die DFG im Rahmen des Projektes „LION – Lokalisierung und Identifikation sich bewegender Schallquellen“ (GZ: OC 16/10-1) gefördert.

Literatur

[1] M. Ochmann, Exact solution for the acoustical impulse response of a line source above an absorbing plane, J. Acoust. Soc. Am. 144 (3), 1539-1549, 2018.

[2] J. Delfs, Basics of Aeroacoustics, Lecture notes, WS 2016/2017 at Technische Universität Braunschweig, 2016.

[3] D. Dragna, P. Blanc-Benon, Sound radiation by a moving line source above an impedance plane with frequency-dependent properties, J. Sound. Vib. 349, 259-275, 2015.