Ein inverses Verfahren zur Schadensrekonstruktion mittels geführter Wellen

Jannis Bulling[1], Benjamin Jurgelucks[2], Jens Prager[1], Andrea Walther[2]
[1] *Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, 12205 Berlin, Deutschland,*
E-Mail: Jannis.Bulling@BAM.de, Jens.Prager@BAM.de
[2] *Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, Deutschland,*
E-Mail: Benjamin.Jurgelucks@math.hu-berlin.de, Andrea.Walther@math.hu-berlin.de

Einleitung

Eine zentrale Aufgabe der zerstörungsfreien Prüfung und der Strukturüberwachung (engl. Structural Health Monitoring - SHM) mit Ultraschallwellen ist die Bewertung von Schäden in Bauteilen. In vielen Bauteilen, wie zum Beispiel platten- und schalenförmigen Strukturen, Rohrleitungen oder Laminaten, breitet sich der Ultraschall in Form geführter Wellen aus. Zwar haben geführte Wellen eine relativ große Reichweite innerhalb des Bauteils und ermöglichen so eine großflächige Prüfung, ihre multimodalen und dispersiven Eigenschaften erschweren jedoch die Analyse der vom Schaden kommenden Reflexionen. Eine Möglichkeit, die Messsignale zu interpretieren und die Schäden zu charakterisieren, ist deren Vergleich mit der Wellenausbreitung in einem digitalen Simulationsmodell. Hierbei stellt sich die Aufgabe, eine Fehlstelle innerhalb des Simulationsmodells anhand der Messdaten zu rekonstruieren. Diese Rekonstruktion beschreibt ein inverses Problem, das mehrere Vorwärtsrechnungen braucht, um das Schadensmodell an die Messdaten anzupassen.

Grundsätzlich können für diese Aufgabestellung verschiedene Simulationsverfahren eingesetzt werden, wie z.B. die „Finite Element Method“ (FEM). Die meisten Arbeiten zu verwandten Fragestellungen verwenden die „Extended Finite Element Method“ (XFEM), da diese Methode es erlaubt, die Fehlstelle unabhängig vom FE-Gitter zu parametrisieren [1, 2, 3, 4]. Durch die kleine Wellenlänge von Ultraschallwellen sind jedoch klassische, elementbasierte Vorwärtsmethoden wie die FEM und XFEM rechenintensiv, weshalb die Autoren die semi-analytische „Scaled Boundary Finite Element Method“ (SBFEM) benutzen [5, 6, 7], um den Rechenaufwand zu verringern. Hierbei können insbesondere die fehlerfreien Bereiche des Wellenleiters besonders effektiv simuliert werden. Im Beitrag wird ein inverses Verfahren basierend auf dem Algorithmischen Differenzieren in Kombination mit der SBFEM vorgestellt und an Rissen in einem 2D-Querschnittmodell einer Stahlplatte getestet. In der präsentierten Vorstudie werden dafür „Messdaten“ aus unabhängigen Simulationen verwendet.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Als erstes wird das inverse Problem und die resultierende Optimierung definiert. Es folgt eine Vorstellung der Vorwärtsrechnung mit der SBFEM anhand einer Stahlplatte. Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Optimierung vorgestellt und die Untersuchungen zu Rauscheinflüssen präsentiert. Am Schluss wird ein Fazit gezogen.

Das inverse Problem

Zu lösen ist das inverse Problem

$$\mathbf{q}^{\min} = \arg\min_{\mathbf{q}\in\mathcal{Q}} \|\mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{y}_m\|^2, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{y}_m$ die Messdaten sind und $\mathbf{F}\colon \mathbf{q} \mapsto \mathbf{y}_s$ der Vorwärtsoperator, der eine Simulation mit einem Schadensmodell, das von gewissen geometrischen Parametern $\mathbf{q}$ abhängt, beinhaltet. Die Messdaten $\mathbf{y}_m$ können dabei entweder die rohen Zeitsignale der Ultraschallmessung oder nachbearbeitete Daten sein. Die Datenaufbereitung für diese Veröffentlichung wird später diskutiert. Wie in der Einleitung erwähnt, wird für diese Arbeit die semi-analytische SBFEM verwendet, um ein möglichst effektives Vorwärtsmodell zu erhalten. Gleichung (1) wird durch eine iterative regularisierte Gauß-Newton-Methode optimiert [8]:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{b}_n, \tag{2}$$
$$\mathbf{A}_n = \mathbf{F}'(\mathbf{q}_n)^*\mathbf{F}'(\mathbf{q}_n) + \alpha_n\mathbf{I}, \tag{3}$$
$$\mathbf{b}_n = \mathbf{F}'(\mathbf{q}_n)^*(\mathbf{y}_m - \mathbf{F}(\mathbf{q}_n)) + \alpha_n(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_n), \tag{4}$$

wobei $\mathbf{F}'$ die Jacobi-Matrix des Vorwärtsoperators, $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix und $\alpha_n \to 0$ der Regularisierungsparameter ist. Die Jacobi-Matrix des gesamten SBFEM-Modells wird durch Algorithmisches Differenzieren (AD) berechnet [9]. Da die Implementierung des Vorwärtsoperators in MATLAB vorliegt, wurde hierfür das AD-tool ADiMat verwendet [10]. Zusätzlich wurde eine Methode zur Startwertschätzung für $\mathbf{q}_0$ entwickelt, die auf der Laufzeit der Ultraschallpulse basiert. Die Details zu dieser Startwertschätzung können [11] entnommen werden.

Das Vorwärtsmodell

Der Vorwärtsoperator ist hauptsächlich durch die Approximation der linearen elastischen Wellenleitungsgleichung über den Frequenzbereich gegeben, d.h.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}(\mathbf{x})) + \omega^2\rho\boldsymbol{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{5}$$
$$\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}(\mathbf{x})) = \tau_\omega(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\Gamma, \tag{6}$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ der lineare Stressoperator, $\boldsymbol{u}$ die Verschiebungen, ω die Kreisfrequenz, ρ die Dichte, $\mathbf{n}$ der Normalenvektor und $\boldsymbol{\tau}$ die äußeren Kräfte sind.

Als numerisches Beispiel wird hier das Querschnittsmodell einer Stahlplatte von 5 mm Dicke mit Riss präsentiert. Die Materialparameter des Baustahls der Platte sind in Tabelle 1 zu finden. Eine Übersicht über das Modell kann mit Abbildung 1 gewonnen werden. Die

Tabelle 1: Materialparameter des Baustahls.

Name	Wert	Einheit
Elastizitätsmodul	200	GPa
Poissonzahl	0,3	
Dichte	7,85	kg/m^3

x-Achse ist dabei mehrmals unterbrochen, um eine Abbildung trotz der Länge von über einem Meter zu gewähren. Die Abbildung 1 zeigt die unterschiedlichen Abschnitte mit verschiedenen Aufgabenstellungen für das Modell. Für die Approximation von Gleichung (5) und (6) mit der SBFEM wird das Gebiet Ω der Stahlplatte in mehrere Superelemente Ω_k unterteilt. Dabei gibt es zwei Typen von Superelementen: Erstens, stern-konvexe Polygone, z.B. Ω_2, Ω_5, die eine FE-Randdiskretisierung besitzen und mit dem verbesserten Kettenbruchverfahren von Chen et al. [6] berechnet werden. Der zweite Typ von Superelementen, z.B. $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_6$, basiert auf der Formulierung von Gravenkamp et al. [7]. Dieser Typ hat nur FE-Randdiskretisierung parallel zur y-Achse, während der Rest des Teilgebietes analytisch berechnet wird. Das macht diesen Typen besonders effizient für die langen Strecken in der Stahlplatte. Außerdem kann dieses Superelement dazu eingesetzt werden, halb-unendliche Teilgebiete zu berechnen, z.B. Ω_1 und Ω_6. Für die finiten Elemente wurden höhergradige Formfunktionen vom Grad p = 4 mit 5 Knoten verwendet, die auf den Gauß-Lobatto-Integrationspunkten basieren.

Der erste Abschnitt von Abbildung 1 stellt durch Pfeile die Anregungskraft eines Doppeltransmitters, die als räumlich-konstante Normalkraft auf beiden Seiten der Platte angenommen wird, dar. Ein Doppeltransmitter, das heißt, ein baugleicher Transmitter für jede der beiden Seiten der Stahlplatte, kann grundsätzlich beide Fundamentalmoden anregen [12]. Hier wird der Aufbau genutzt, um monomodal die S0-Mode durch einen sinusmodellierten Gauß-Puls, $\sin(2\pi f_c t)\exp(-0,5(t-t_c)^2 f_c^2)$, mit einer Mittelfrequenz f_c von 200 kHz und einem Zeitversatz t_c von 25 µs anzuregen. In Abbildung 2 ist das normalisierte Spektrum der Anregung zu sehen, sowie die Dispersionskurven für die Gruppengeschwindigkeiten des Wellenleiters. Zu erkennen ist, dass sich das relevante Spektrum nur in dem Bereich befindet, in dem die beiden Fundamentalmoden ausbreitungsfähig sind. Es wurde die Anregung der S0-Mode gewählt, da diese in Voruntersuchungen eine größere Sensitivität in Form von höheren Reflektionen auf diesen Defekt gezeigt hat.

Der zweite Abschnitt von Abbildung 1 zeigt den Auswertungspunkt, während der dritte Abschnitt die Fehlstelle in Form eines Risses, der in rot dargestellt ist, abbildet. Am Auswertungspunkt P wird die y-Verschiebung der Welle entnommen. Die y-Verschiebung hat größere praktische Relevanz als die x-Verschiebung, da diese einfacher zu messen ist. In der Praxis ist die y-Verschiebung zum Beispiel durch ein Laser-Doppler-Vibrometer aufnehmbar. Abbildung 3a) zeigt die y-Verschiebung für verschiedene Risspositionen q_1 für einen geraden Riss mit 1,375 mm Tiefe. Über den Signalen ist die Einhüllende in schwarz dargestellt. Nimmt man das mittlere, grüne Signal als künstliches Messsignal, d.h. $\mathbf{y}_m = \mathbf{F}(\mathbf{q}^*)$, so sind daneben zwei Zielfunktionen, die den Abstand zwischen dem künstlichen Messsignal und den anderen Simulationssignalen berechnen, zu sehen. Die erste Zielfunktion in Abbildung 3b) basiert auf der Differenz der Rohsignale, während die Zielfunktion in Abbildung 3c) auf der Differenz der Einhüllenden basiert. Die Abbildung 4a) und b) zeigen einen um 90° gedrehte Vergrößerung des globalen Minimums für beide Zielfunktionen, welches in den Abblidungen 3b) bzw. 3c) blau markiert ist. Die Zielfunktion der Rohsignale hat viele lokale Minima. Wenn das Simulationssignal und das Messsignal in Phase sind, entsteht ein solches lokales Minimum. Problematisch ist, dass klassische Optimierungsmethoden nicht zwischen lokalen und globalen Minima unterscheiden können. Für diese Arbeit wird deshalb die Zielfunktion basierend auf der Einhüllenden benutzt, da diese Zielfunktion in unseren Untersuchungen wesentlich bessere Eigenschaften für die Optimierung gezeigt hat.

Der letzte Abschnitt von Abbildung 1 zeigt den Riss. Hierbei ist hervorzuheben, dass der Approximationsansatz der SBFEM die Rissspitzensingularität sehr genau abbildet [13] und somit keine lokale Verfeinerung wie in der FEM notwendig ist. Der Riss ist durch drei Parameter definiert. Wie oben genannt, ist der erste Parameter q_1 die globale x-Position. Er bewirkt, dass das Superelement Ω_5 entlang der x-Achse verschoben und das Superelement Ω_4 entsprechend verkürzt bzw. verlängert wird. Der zweite Parameter q_2 ist mit der Rissneigung verbunden, indem die Rissspitze innerhalb des rechteckigen Superelements Ω_5 in x-Richtung verschoben wird. Analog wird die Risstiefe durch den dritten Parameter q_3 definiert, indem die Rissspitze in y-Richtung verschoben wird. Die Tabelle 2 gibt die minimalen und maximalen Werte der Parameter an, die sich an gängige Prüfproblemen orientieren. Dieser Wertebereich wurde getestet, so dass der Bereich nur numerisch stabile Approximationen besitzt. Zu beachten ist, dass der erste Parameter dabei einen wesentlich größeren Bereich abdeckt. Dieser große Bereich ist dadurch möglich, dass das Superelement Ω_4 nur Freiheitsgrade auf den Querschnittsrändern besitzt und durch die Länge in x-Richtung nicht die Rechenzeit beeinflusst. Somit besitzt das gesamte bis zu mehr als 2 m lange Modell nur 180 Freiheitsgrade, obwohl die Wellenlänge mit ca. 25 mm relativ klein ist.

Auswertung

Abbildung 5 zeigt das Konvergenzverhalten der einzelnen Parameter, wenn das Signal, das zum Mittelpunkt des Parameterraumes gehört, als künstliches Messsignal benutzt wird. Die Konvergenzrate nähert sich dabei der Steigung des Regularisierungsparameters α_n an. Nach 64 Iterationsschritten ist dabei das Abbruchkriterium erreicht.

Ein weiterer wichtiger Analyseschritt für ein inverses Verfahren ist das Verhalten unter Rauscheinflüssen. Abbildung 6 zeigt den Rekonstruktionsfehler $|q_i^* - q_i^{\min}|$ in Abhängigkeit ansteigender Rauschlevel für dasselbe Ziel-

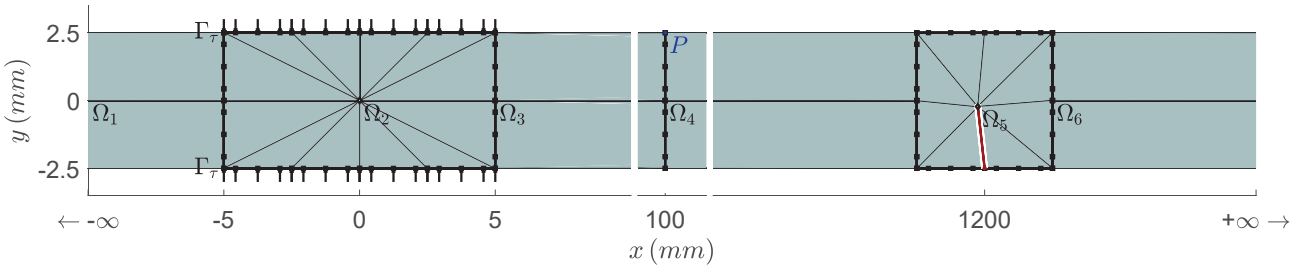

Abbildung 1: Übersicht des SBFEM-Modells.

Tabelle 2: Parametertabelle.

Beschreibung	Parameter	min	max	Einheit
globale x-Position von Ω_5	q_1	200	2200	mm
x-Position der Rissspitze, wobei 0 im Mittelpunkt von Ω_5 liegt	q_2	-0,5	+0,5	mm
y-Position der Rissspitze, wobei 0 im Mittelpunkt von Ω_5 liegt	q_3	-2,25	0	mm

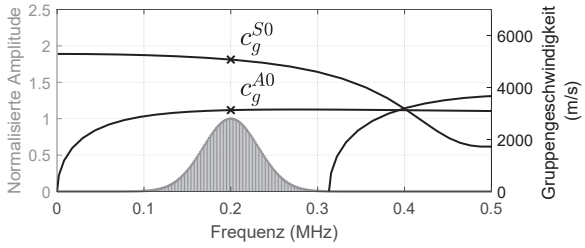

Abbildung 2: Anregungssignal im Frequenzbereich.

Tabelle 3: Statistische Werte von zehn Rekonstruktionen von zufällig gezogenen Zielparametern unter einem Rauschlevel von 10^{-5}.

Formel	Wert
$\min(\|\|\mathbf{q}^* - \mathbf{q}^{\min}\|\|)$	5.3E-06
$\text{mean}(\|\|\mathbf{q}^* - \mathbf{q}^{\min}\|\|)$	1.3E-03
$\max(\|\|\mathbf{q}^* - \mathbf{q}^{\min}\|\|)$	5.4E-03

signal wie im vorherigen Absatz. Das Rauschlevel ist dadurch bestimmt, dass ein normalverteiltes Rauschen mit verschwindenden Mittelwert und einer bestimmten Standardabweichung auf das Zielsignal gegeben wird. Beim Rauschlevel von 10^{-2} bzw. 10^{-3} entspricht die Standartabweichung dabei 1% bzw. $0,1\%$ der Anregungsamplitude. Die Anregungsamplitude wurde für den Anregungsimpuls in Abbildung 3a) vor der orangenen Linie entnommen. In Abbildung 6 zeigen die x-Position q_1 und die Risstiefe q_3 ein robustes Verhalten unter Rauscheinflüssen, während die Rissneigung q_3 einen hohen Rekonstruktionsfehler haben kann. Durch das Hinzugeben von Rauscheinflüssen wird auch verhindert, dass die Ergebnisse nur auf einem sogenannten „Inverse Crime“ basieren.

Final wurden zehn Risse mit Zielparametern $\mathbf{q}^*$ rekonstruiert, um zu untersuchen, ob das Verfahren im ganzen Parameterraum konvergiert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

Fazit

Das Fazit kann mit folgenden Stichpunkten zusammengefasst werden:

- Es wurde zum ersten Mal demonstriert, dass die Ableitungen nach geometrischen Parametern für ein SBFEM-Vorwärtsmodell durch Algorithmisches Differenzieren berechnet werden können.
- Das Vorwärtsmodell ist hoch effizient durch die semi-analytische Formulierung.
- Das entstandene Rekonstruktionsverfahren hat einen Rekonstruktionsfehler von unter 1% bei den numerischen Versuchen (Tabelle 3).
- Die entscheidenden Parameter für die Bewertung des Risses anhand der Rekonstruktion zeigen ein robustes Verhalten unter Rauscheinflüssen.

Weitere Schadensmodelle sind im Artikel [11] zu finden.

Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG-Project: 428590437).

Literatur

[1] D. Rabinovich, D. Givoli und S. Vigdergauz. “XFEM-based crack detection scheme using a genetic algorithm”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71.9 (2007), S. 1051–1080.

[2] J. Jung und E. Taciroglu. “Modeling and identification of an arbitrarily shaped scatterer using dynamic XFEM with cubic splines”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 278 (2014), S. 101–118.

[3] K. Agathos, E. Chatzi und S. P. Bordas. “Multiple crack detection in 3D using a stable XFEM and global optimization”. In: *Computational mechanics* 62.4 (2018), S. 835–852.

[4] M. Livani, N. Khaji und P. Zakian. “Identification of multiple flaws in 2D structures using dynamic extended spectral finite element method with a universally enhanced meta-heuristic optimizer”. In:

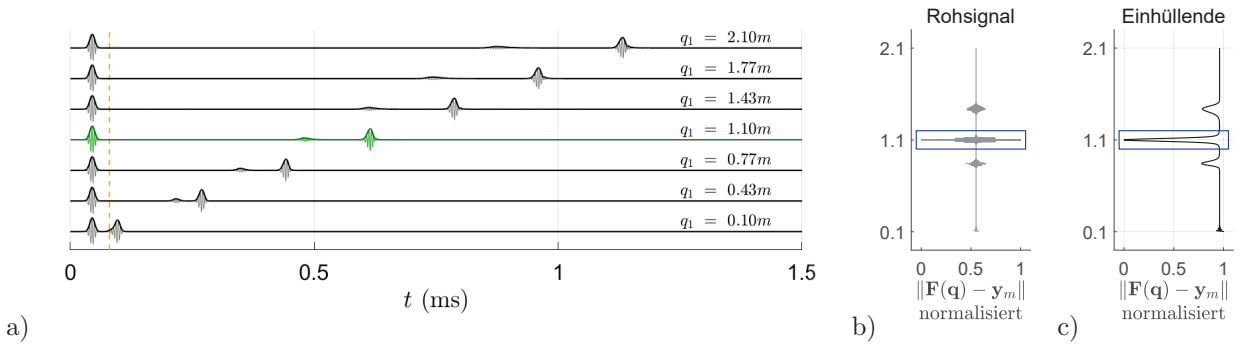

Abbildung 3: a) Signale für verschiedene Risspositionen, Zielfunktion basierend auf b) den Rohsignalen und c) der Einhüllenden.

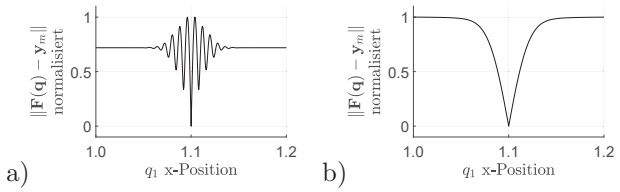

Abbildung 4: Zielfunktion basierend auf a) den Rohsignalen und b) der Einhüllenden als um 90° gedrehte Vergrößerung der Abbildung 3b) und 3c).

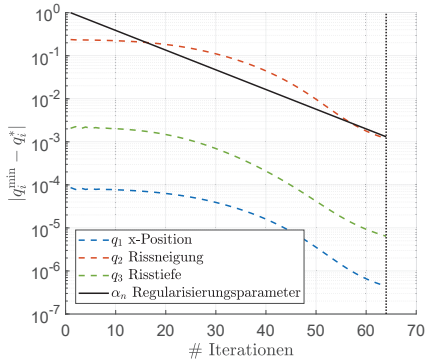

Abbildung 5: Konvergenzverhalten unter einem Rauschlevel von 10^{-5}.

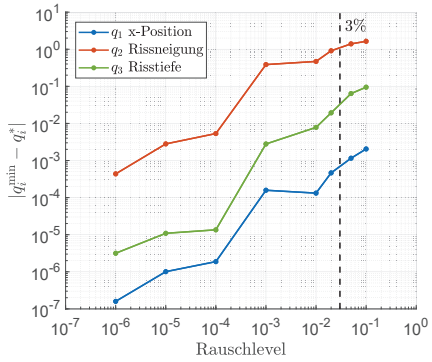

Abbildung 6: Verhalten bei Rauscheinflüssen.

Structural and multidisciplinary optimization 57.2 (2018), S. 605–623.

[5] C. Song. *The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation*. Wiley, 2018.

[6] D. Chen, C. Birk, C. Song und C. Du. "A high-order approach for modelling transient wave propagation problems using the scaled boundary finite element method". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 97.13 (2014), S. 937–959.

[7] H. Gravenkamp, C. Birk und C. Song. "Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method". In: *Journal of computational physics* 295 (2015), S. 438–455.

[8] B. Kaltenbacher, A. Neubauer und O. Scherzer. *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*. de Gruyter, 2008.

[9] A. Griewank und A. Walther. *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. SIAM, 2008.

[10] C. H. Bischof, H. M. Bucker, B. Lang, A. Rasch und A. Vehreschild. "Combining source transformation and operator overloading techniques to compute derivatives for MATLAB programs". In: *Proceedings. Second IEEE International Workshop on Source Code Analysis and Manipulation*. IEEE. 2002, S. 65–72.

[11] J. Bulling, B. Jurgelucks, J. Prager und A. Walther. *Defect reconstruction in a 2D semi-analytical waveguide model via derivative-based optimization*. Techn. Ber. `http://arxiv.org/abs/2108.00770`. ArXiv, 2021.

[12] Z. Su und L. Ye. "Selective generation of Lamb wave modes and their propagation characteristics in defective composite laminates". In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications* 218.2 (2004), S. 95–110.

[13] J. Bulling und H. Gravenkamp. "Comparison of different models for stress singularities in higher order finite element methods for elastic waves". In: *PAMM* 19.1 (2019), e201900095.