Isogeometrische Analyse von getrimmten CAD-Geometrien mit der Boundary-Elemente-Methode

Kim Marcel Beiroth[1], Sören Keuchel[2] und Otto von Estorff[1]

[1] *Technische Universität Hamburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: mub@tuhh.de*

[2] *Novicos GmbH, 21079 Hamburg, Deutschland*

Einleitung

Die Boundary-Elemente-Methode (BEM) ist ein sehr effizientes Verfahren zur numerischen Simulation akustischer Fragestellungen. Die Genauigkeit hängt dabei unter anderem von der Diskretisierung der Geometrie ab. Isogeometrische Analysen (IGA) verwenden CAD-Modelle direkt als Basis für die numerischen Berechnungen und gewährleisten somit eine exakte Darstellung der Geometrie. Dafür nutzen sie die den CAD-Modellen zugrundeliegenden Nicht-Uniformen Rationalen B-Splines (NURBS) zur Geometriebeschreibung. Die oberflächenbasierte BEM ermöglicht dabei die Verknüpfung zwischen CAD- und Berechnungsmodell. Dadurch reduziert sich neben dem Diskretisierungsfehler auch der mit der Vernetzung verbundene Aufwand erheblich.

CAD-Modelle enthalten zur effizienten Geometriedarstellung häufig getrimmte Flächen. Auf diese Weise können komplexe Geometrien mit überschaubarem Aufwand erstellt werden. Für die numerische Simulation getrimmter Geometrien ergeben sich jedoch einige Schwierigkeiten, wie Stabilitätsprobleme durch degenerierte Ansatzfunktionen. Außerdem stellt die numerische Integration getrimmter Elemente eine Herausforderung dar.

Im vorliegenden Beitrag wird ein Ansatz zur numerischen Behandlung getrimmter CAD-Geometrien mit der IGA-BEM vorgestellt und anhand akustischer Anwendungsbeispiele verifiziert.

Boundary-Elemente-Methode

Die Beschreibung akustischer Wellenausbreitungen im Frequenzbereich unter der Annahme harmonischer Anregungen liefert die Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \tag{1}$$

wobei p den akustischen Druck und $k = \frac{\omega}{c}$ die Wellenzahl mit der Kreisfrequenz ω und der Schallgeschwindigkeit c beschreibt. Um die Größen im Berechnungsgebiet allein durch Randwerte ausdrücken zu können, wird für die BEM die zugrundeliegende Differentialgleichung in die Randintegralgleichung

$$c(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma p(\boldsymbol{y})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y}\mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

überführt [2]. Dabei ist $c(\boldsymbol{x}) = 1/2$ der Randfaktor für glatte Oberflächen, $\boldsymbol{x}$ ist der Empfängerpunkt, $\boldsymbol{y}$ der Quellpunkt, $\boldsymbol{n}_y$ der Normalenvektor, p der Schalldruck und $q = \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}$ der akustische Fluss. Im dreidimensionalen Fall ist die Fundamentallösung G gegeben durch

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{e^{-ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}. \tag{3}$$

Die Randintegralgleichung (2) löst akustische Probleme im Frequenzbereich theoretisch exakt. Die auftretenden Integrale müssen aber in der Regel numerisch bestimmt werden. Deshalb ist es notwendig, eine Diskretisierung der Oberfläche vorzunehmen. Hierfür werden sowohl die Geometrie als auch die Randwerte mithilfe von n diskreten Stützwerten Φ_j sowie deren zugehörigen Ansatzfunktionen $f_j^p(\xi)$ der Ordnung p approximiert

$$\Phi(\xi) = \sum_{j=1}^{n} f_j^p(\xi)\Phi_j. \tag{4}$$

Die Wahl der Ansatzfunktionen für die Geometrie- und Randwertbeschreibung kann dabei unabhängig voneinander erfolgen.

Isogeometrische Analysen

Für isogeometrische Analysen bietet sich die Verwendung von NURBS-Ansatzfunktionen an. Diese ermöglichen eine exakte Darstellung komplexer Geometrien und sind zudem seit Jahren ein verbreiteter Standard zur Geometriebeschreibung in gängigen CAD-Programmen. Die NURBS setzen sich zusammen aus gewichteten B-Splines. Diese sind rekursiv definiert

$$B_i^0(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \tag{5}$$

$$B_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_i^{p-1}(\xi) - \frac{\xi - \xi_{i+p+1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(\xi) \tag{6}$$

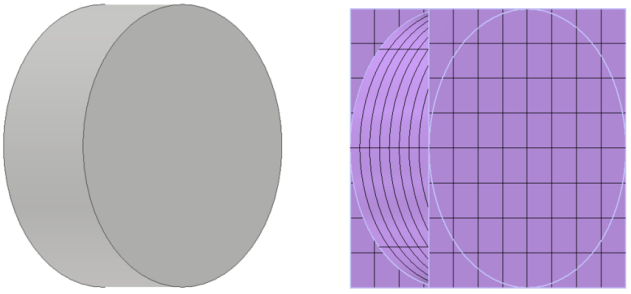
mit der Ordnung p und dem Index $i = 1,\ldots,n$ der Basisfunktionen, der Parameterkoordinate ξ sowie den Einträgen ξ_i aus dem Knotenvektor $\boldsymbol{\Xi}$. Der Knotenvektor teilt den Parameterraum in Elemente auf [3]. Die bivariaten NURBS-Ansatzfunktionen zur Modellierung von Flächen ergeben sich aus dem Tensorprodukt gewichteter B-Splines

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{B_i^p(\xi)B_j^q(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} B_k^p(\xi)B_l^q(\eta)w_{k,l}} \tag{7}$$

mit den Gewichten w. Die NURBS-Ansatzfunktionen sind auf einer den Elementen übergeordneten Struktur definiert, die als Patches bezeichnet werden [1].

Analyse getrimmter Flächen

Die Verwendung von getrimmten Flächen erleichtert die Erstellung von CAD-Geometrien enorm und ist daher in der Realität kaum zu vermeiden. Dabei werden NURBS-Flächen mithilfe von Trimmkurven in aktive und inaktive Bereiche aufgeteilt. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 1 dargestellt. Dort ist auf der linken Seite eine Kreisscheibe zu sehen, die mithilfe eines CAD-Tools erstellt wurde. Abbildung 1b zeigt die zugrundeliegende Geometriebeschreibung. Diese enthält quadratische Grundflächen anstatt der Kreisflächen. Mithilfe von kreisförmigen Trimmkurven werden die Flächen getrimmt, um die gewünschte Geometrie zu erhalten. CAD-Modellen liegen also häufig Trimmkurven zugrunde, welche die Geometrie bestimmen. Die mathematische Beschreibung der Geometrie ändert sich durch die Trimmung nicht, d.h. die Basisfunktionen des Parameterraums und die Kontrollpunkte der Geometrie sind dieselben wie für die ungetrimmte Geometrie. Um mit der IGA sämtliche CAD-Geometrien direkt als Grundlage für numerische Berechnungen nutzen zu können, müssen Trimmflächen in den Simulationen unterstützt werden. Dazu muss im ersten Schritt die Trimmung erkannt und das Rechengebiet abgegrenzt werden. Dies ist im vorliegenden Beitrag mithilfe der Open-Source Software Open CASCADE [7] umgesetzt. Außerdem kann die Stabilität der Basis durch die Trimmung negativ beeinflusst werden und auch die numerische Integration getrimmter Elemente muss gesondert betrachtet werden.



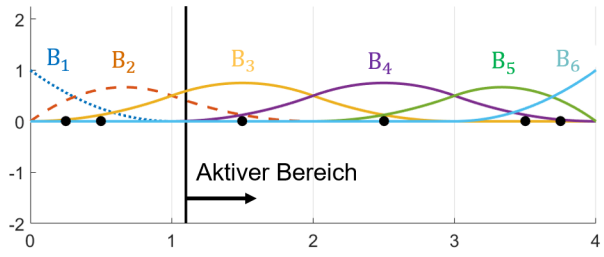
(a) CAD-Geometrie. **(b)** Zugehörige Trimmung.

Abbildung 1: Geometriebeschreibung einer Kreisscheibe in CAD mit der zugrundeliegenden Beschreibung der Trimmung.

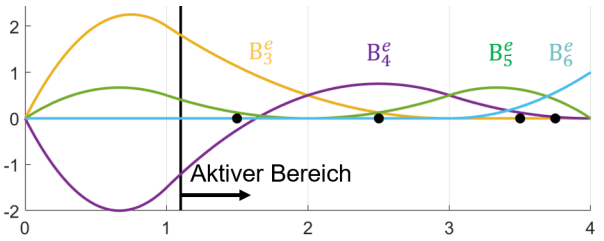
Aufgrund auftretender Stabilitätsprobleme durch degenerierte Funktionen eignen sich die B-Splines bzw. NURBS nicht zur Rechnung auf getrimmten Flächen. Das Wiederherstellen der Stabilität der Basis kann durch die Verwendung der Extended B-Splines [5] erreicht werden. Die Funktionsweise der Extended B-Splines ist in Abbildung 2 dargestellt. Dort sind zunächst die Basisfunktionen der B-Splines mit den dazugehörigen Stützpunkten für ein eindimensionales Beispiel zu sehen. Die Trimmung erfolgt bei $\xi_t = 1{,}1$ mit dem aktiven Bereich von $\xi \in [\xi_t, 4]$. Im ersten Schritt werden die Basisfunktionen in stabile, degenerierte und inaktive Funktionen aufgeteilt. Letztere liegen komplett außerhalb der aktiven Trimmfläche, haben somit keinen Einfluss auf die Berechnungen und können daher vernachlässigt werden. Im Beispiel trifft dies auf Funktion B_1 zu. Stabile Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass deren zugehöriger Stützpunkt innerhalb des aktiven Bereichs liegt (Funktionen B_3 bis B_6). Im Gegensatz dazu liegen die Stützpunkte degenerierter Funktionen außerhalb, während die zugehörige Ansatzfunktion in das Rechengebiet hineinragt (Funktion B_2). Aus diesem Grund dürfen degenerierte Funktionen nicht vernachlässigt werden. Stattdessen werden sie durch Erweiterungen stabiler Funktion ersetzt. Die Extended B-Splines B_i^e ergeben sich zu

$$B_i^e(\xi,\eta) = B_i(\xi,\eta) + \sum_{j \in J_i} e_{i,j} B_j(\xi,\eta). \tag{8}$$

Dabei sind $e_{i,j}$ die Gewichtungsfaktoren und J_i ist die Menge der degenerierten Ansatzfunktionen. Die Berechnung der bivariaten Gewichtungsfaktoren ist in [5] gegeben. Die Erweiterung der B-Splines zu den Extended B-Splines ist in Abbildung 2b dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die degenerierte Funktion B_2 durch Erweiterungen der stabilen Funktionen B_3, B_4 und B_5 ersetzt wird. Des Weiteren wird die inaktive Funktion B_1 gestrichen. Weit von der Trimmkurve entfernte Funktionen bleiben unverändert (siehe Funktion B_6). Die Extended B-Splines können im Gegensatz zu den B-Splines auch negative Werte annehmen. Die Stabilität der Basis ist bei Verwendung der Extended B-Splines unabhängig von der Trimmposition gegeben. Zudem wird garantiert, dass sich die Kollokationspunkte innerhalb der Trimmfläche befinden.



(a) Einteilung der Funktionen der B-Splines.



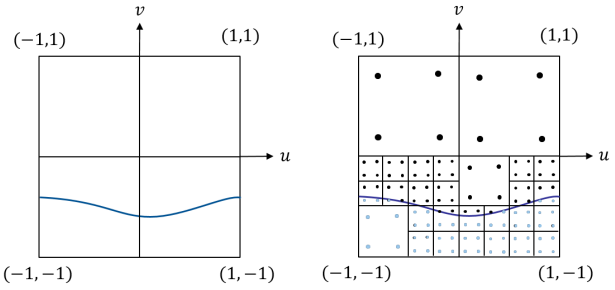
(b) Erweiterung stabiler Funktionen zu Extended B-Splines.

Abbildung 2: Schritte zur Bestimmung der Extended B-Splines aus den B-Splines zum Wiederherstellen der Stabilität für getrimmte Geometrien.

Die Extended B-Splines können in die Simulation einbezogen werden, ohne direkt im Integrationsprozess berücksichtigt zu werden. Stattdessen wird über alle B-Spline-Ansatzfunktionen mit Einfluss (alle Funktionen

außer die inaktiven) mit allen Kollokationspunkten innerhalb der Trimmfläche integriert. Dadurch ergeben sich rechteckige statt quadratische Systemmatrizen, die anschließend mit einer globalen Matrix aller Gewichtungsfaktoren der Extended B-Splines multipliziert werden. Dieses Vorgehen wird in [5] beschrieben.

Die numerische Integration getrimmter Patches wird durch eine Quadtree-Unterteilung der Integrationselemente in Zellen abhängig von der Trimmkurve umgesetzt [6]. Die maximale Unterteilungstiefe ist dabei beliebig einstellbar. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 3 visualisiert. Die Trimmkurve ist in blau dargestellt. Im ersten Schritt wird das getrimmte Integrationselement in vier gleich große Zellen unterteilt, siehe 3a. In weiteren Unterteilungsschritten werden ungetrimmte Zellen nicht weiter verfeinert, während sich getrimmte Zellen immer weiter zerteilen. Dadurch ergibt sich die in Abbildung 3b dargestellte Unterteilung nach drei Schritten. Zusätzlich sind dort beispielhafte Integrationspunkte dargestellt. Die schwarzen Punkte befinden sich innerhalb der Trimmfläche, während die blauen Punkte außerhalb sind. Nach abgeschlossener Unterteilung wird die numerische Integration über die Zellen ausgeführt. Dabei können komplett außerhalb liegende Zellen vernachlässigt werden. Bei getrimmten Zellen muss für die einzelnen Integrationspunkte getestet werden, ob sie zum aktiven Bereich der Geometrie gehören oder nicht. Die Integration über Zellen, die sich komplett innerhalb der Trimmfläche befinden, benötigt diesen zusätzlichen Test nicht. Vor dem ersten Unterteilungsschritt findet eine Zerlegung der Patches in seine Elemente statt. So können auch ungleichmäßig unterteilte Patches berücksichtigt werden. Außerdem wird dadurch auch die Genauigkeit auf ungetrimmten Patches verbessert. Die Quadtree-Unterteilung kann auch unabhängig von der Trimmkurve für ungetrimmte Elemente durchgeführt werden.



(a) Unterteilungstiefe 1. **(b)** Unterteilungstiefe 3.

Abbildung 3: Quadtree-Unterteilung der Integrationselemente in Zellen zur numerischen Integration getrimmter Elemente.

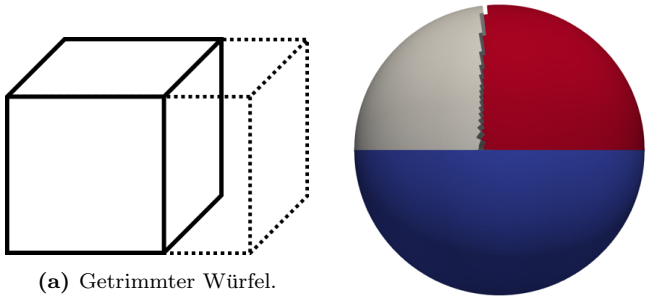
Numerische Beispiele

Der entwickelte Ansatz zur Berechnung getrimmter CAD-Geometrien mit der IGA-BEM wird im Folgenden anhand akustischer Fragestellungen verifiziert. Als akustisches Medium wird Luft mit einer Dichte von $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$ und einer Schallgeschwindigkeit von $c = 340\,\mathrm{m/s}$ betrachtet. Zur Verifizierung der numerischen Berechnungen wird der integrale Fehler bzw. der Dirichlet-Fehler

$$e_D = \frac{\sqrt{\int_\Gamma |p_{\mathrm{num}} - p_{\mathrm{ref}}|^2 \,\mathrm{d}\Gamma}}{\sqrt{\int_\Gamma |p_{\mathrm{ref}}|^2 \,\mathrm{d}\Gamma}} \tag{9}$$

genutzt. Aufgrund des Integrals über die gesamte Oberfläche Γ besitzt dieser Fehler mehr Aussagekraft über die Güte der Lösung als eine punktweise Fehlerbetrachtung.

Es werden zwei unterschiedliche Geometrien betrachtet, die sowohl ungetrimmt als auch mit getrimmten Flächen dargestellt werden können, um die Funktionalität der entwickelten Methode zu zeigen. Die beiden getrimmten Versionen der Geometrien sind in Abbildung 4 gezeigt. Die erste Geometrie ist ein Würfel mit 1 m Kantenlänge. Um die getrimmte Version des Würfels zu erzeugen, wird eine Kante länger definiert und anschließend an einer Ebene auf 1 m getrimmt [5]. Die ungetrimmte Kante am Ende wird dementsprechend verschoben, sodass sich dieselbe Geometrie wie für den ungetrimmten Würfel ergibt. Die zweite Geometrie ist eine Kugel mit einem Radius von 1 m, die sich aus mehreren getrimmten Teilen zusammensetzen lässt. Dazu wird von der oberen Halbkugel einmal der Bereich rechts von einer ebenen Trimmkurve weggetrimmt und einmal der Bereich links von der Trimmkurve.



(a) Getrimmter Würfel. **(b)** Getrimmte Kugel.

Abbildung 4: Untersuchte Geometrien zusammengesetzt aus getrimmten Flächen.

Für die Berechnungen wird die Anregung durch eine Monopolquelle im Mittelpunkt der Geometrien angenommen. Die analytische Lösung ist bekannt und wird in Form von Oberflächenschnellen als Randbedingungen vorgegeben. Für die Berechnungen wird die Anregungsfrequenz zu 100 Hz und die Integrationsordnung zu 10 gewählt. Es handelt sich bei den betrachteten Geometrien jeweils um exakte NURBS-Netze. Für die Randwertbeschreibung werden quadratische Ansatzfunktionen verwendet. Dabei kommen Extended B-Splines für die getrimmten Geometrien zum Einsatz, während für die ungetrimmten Geometrie B-Splines genutzt werden. Zur Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade werden nach [1] zusätzliche Knoten hinzugefügt (h-Verfeinerung) und die Knotenmultiplizitäten der inneren Knoten werden erhöht (Bezier-Extraktion). Als Kollokationspunkte werden Zwei-Ring Punkte verwendet. Die Integration erfolgt mit der Gauss-Quadratur sowie der Polarkoordinatentransformation für singuläre Integrale. Zur besseren

Vergleichbarkeit werden die ungetrimmten Geometrien auf gleiche Weise wie die getrimmten Geometrien mit der Quadtree Zerlegung unterteilt. Als Unterteilungstiefe für die Untersuchungen wird für den Würfel 3 und für die Kugel 1 gewählt.

In Abbildung 5 ist der Dirichlet-Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade für den Würfel dargestellt. Dabei werden neben dem ungetrimmten Würfel unterschiedliche Ausgangskantenlängen für den getrimmten Würfel betrachtet. Aus dem Diagramm geht hervor, dass der Fehler für unterschiedliche Ausgangskantenlängen in derselben Größenordnung liegt, also weitestgehend unabhängig von der Trimmposition ist. Des Weiteren wird für die getrimmten Würfel eine vergleichbare Genauigkeit wie für den ungetrimmten Würfel erreicht. Die erkennbaren Schwankungen der Fehler sind durch die Unterschiede in den Positionen der Kollokationspunkte durch die verschiedenen Ausgangskantenlängen zu erklären.

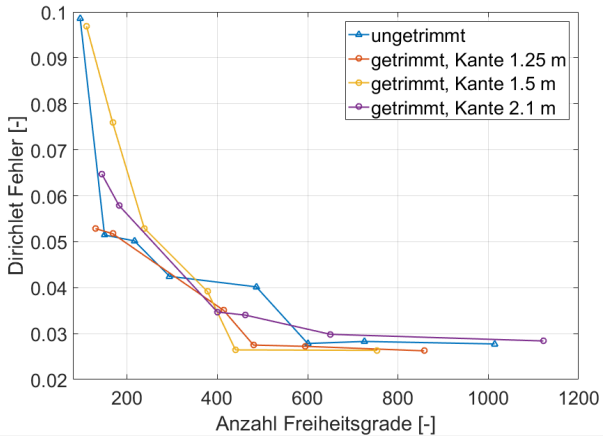


Abbildung 5: Dirichlet-Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade für den ungetrimmten Würfel sowie für den getrimmten Würfel mit unterschiedlichen Ausgangskantenlängen.

In Abbildung 6 ist der Dirichlet-Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade für die Kugel dargestellt. Zu sehen ist der Vergleich der ungetrimmten Kugel mit der getrimmten Kugel für eine Trimmung 0,1 m neben der Symmetrieachse. Es ist zu erkennen, dass die Ergebnisse für die getrimmte Kugel sehr gut mit denen für die ungetrimmte Kugel übereinstimmt. Dies zeigt die Funktionalität der entwickelten Methode für dieses Beispiel. Die Methode stößt jedoch an ihre Grenzen, wenn von einem der Patches nur ein sehr kleiner Teil als Trimmfläche übrig bleibt. Dann liegt kein Element vor, welches lediglich stabile Ansatzfunktionen enthält Die ist zur Verwendung der Extended B-Splines allerdings nötig. In dem Fall muss die Geometrie so lange h-verfeinert werden bis diese Bedingung erfüllt ist.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde ein Ansatz zur Berechnung getrimmter CAD-Geometrien mit der IGA-BEM vorgestellt. Dieser ermöglicht das direkte Einbinden beliebiger CAD-Geometrien ohne zusätzlichen Vernetzungsaufwand und ohne Geometriefehler. Die Stabilisierung der Basis unabhängig von der Trimmposition wurde durch

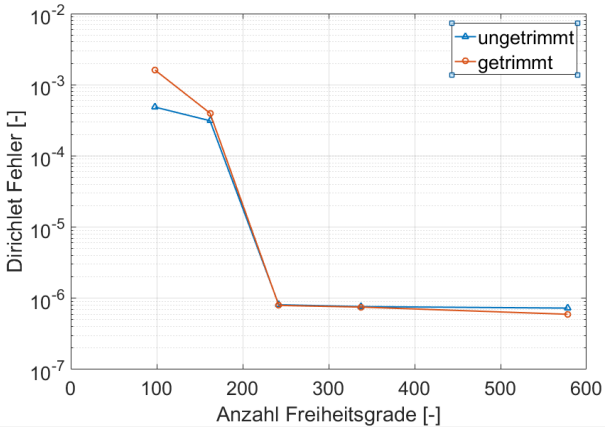


Abbildung 6: Dirichlet-Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade für die ungetrimmte und die getrimmte Kugel.

die Verwendung der Extended B-Splines erreicht. Für die betrachteten Fälle hat sich eine vielversprechende Genauigkeit im Vergleich zu getrimmten Geometrien gezeigt.

Die vorgestellte Methode sollte für weitere, komplexere Testfälle verifiziert werden. Dafür sollten weitere Integrationsroutinen implementiert werden [4]. Für zukünftige Untersuchungen ist zudem eine Verbindung der IGA mit schnellen Methoden, wie der Fast-Multipole-Methode, denkbar.

Literatur

[1] Beiroth, K.M.; Keuchel S., von Estroff, O.: Patch-Ansatz für akustische isogeometrische Analysen mit der Boundary-Elemente-Methode. DAGA 2020, Hannover, 2020, S. 677-680.

[2] Gaul, L.; Fiedler, C.: Methode der Randelemente in Statik und Dynamik. Springer, Heidelberg, 2013.

[3] Hughes, T.J.R.; Cottrell, J.A.; Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005), S.4135-4195.

[4] Keuchel, S.; Hagelstein, N.C.; Zaleski, O.; von Estorff O.: Evaluation of hypersingular and nearly singular integrals in the Isogeometric Boundary Element Method for acoustics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 325 (2017), S. 488-504.

[5] Marussig, B.; Zechner, J.; Beer, G.; Fries T.-P.: Stable Isogeometric Analysis of Trimmed Geometries, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2016).

[6] Rank, E.; Ruess, M.; Kollmannsberger, S.; Schillinger, D.; Düster A.: Geometric modeling, isogeometric analysis and the finite cell method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 249-252 (2012), S. 104-115.

[7] Open CASCADE Homepage, URL: `http://www.opencascade.com`