# Meta-Modelle für komplexe Akustiksimulationen im Frequenzbereich

Thomas Kohlsche, Stephan Lippert, Otto von Estorff

*Technische Universität Hamburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: mub@tuhh.de*

## Einleitung

Akustische Eigenschaften gewinnen in vielen praktischen Anwendungsbereichen wie der Automobil- oder Luftfahrtbranche immer mehr an Bedeutung, weshalb akustische Zielgrößen beim numerischen Designprozess zunehmend berücksichtigt werden. Als Designprozess wird hierbei die Untersuchung einer akustischen Zielgröße $y$ in Abhängigkeit von Frequenz $f$ und Entwurfsparametern $\varphi$ betrachtet,

$$y = \mathcal{M}(f, \varphi)\,, \tag{1}$$

wobei $\mathcal{M}(f, \varphi)$ ein numerisches Modell bezeichnet. Üblicherweise wird hier meistens die Finite-Elemente-Methode (FEM) oder Boundary-Elemente- Methode (BEM) eingesetzt, welche anschließend für Aufgaben wie Optimierung oder Unschärfequantifizierung genutzt wird. Diese Aufgaben erfordern in der Regel sehr viele Auswertungen des Modells, was bei komplexen akustischen Simulationen zu einem nicht tragbaren Rechenaufwand führt. Ein gängiger Ansatz, dieser Problematik zu begegnen, ist die Verwendung sogenannter Meta- oder Surrogate-Modelle

$$y \approx \tilde{\mathcal{M}}(f, \varphi)\,, \tag{2}$$

welche eine günstige Approximation des rechenintensiven numerischen Modells aus einem verhältnismäßig kleinen Datensatz konstruieren. Meta-Modelle werden in akustischen Anwendungsfällen verhältnismäßig selten genutzt, da das oftmals hochgradig nichtlineare Antwortverhalten akustischer Systeme schwer modellierbar ist und viele Daten erfordert. Erschwerend kommt hinzu, dass in Frequenzrichtung ein vollkommen anderes Antwortverhalten als in Parameterrichtung vorliegt.

In anderen hochkomplexen Anwendungsfeldern wie der numerischen Strömungsmechanik oder Strukturmechanik haben in den letzten Jahren Multi-Fidelity (MF) Methoden ihr Potenzial zeigen können, die Problematik von „zu wenigen Daten für ein zu komplexes Systemverhalten“ zu verringern, siehe z. B. [1]. MF Methoden versuchen, den Spagat zwischen numerischer Genauigkeit und tragbarer Anzahl von Berechnungen zu lösen, indem sie einige wenige rechenintensive Daten eines sogenannten High-Fidelity (HF) Modells $\mathcal{M}_{\mathrm{HF}}(f, \varphi)$ mit vielen günstigen Daten eines weniger genauen Low-Fidelity (LF) Modells $\mathcal{M}_{\mathrm{LF}}(f, \varphi)$ kombinieren. Ob MF Methoden in akustischen Fragestellungen sinnvoll eingesetzt werden können, ist bisher jedoch kaum untersucht worden. Der vorliegende Beitrag konzentriert sich auf die Erzeugung und Verwendung solcher MF Daten anhand eines akustischen Testfalls, wobei sich auf die Verwendung gröberer Diskretisierungen als LF Modell beschränkt wird.

## Multi-Fidelity

In der Numerik ist der Ansatz, Modelle verschiedener Qualität zu verwenden, in Multigrid-Verfahren bereits seit den achtziger Jahren verwurzelt. Unter der Bezeichnung „Multi-Level“ wurde der Gedanke in Multi-Level Monte-Carlo Verfahren weitergeführt [2]. Kennedy und O'Hagan [3] entwickelten mit einem autoregressiven Gauss-Prozess, basierend auf Daten von verschiedener Qualität, die Grundlage für MF Meta-Modelle. Ein umfangreicher Überblick über MF Modelle ist in Pehersdorfer et al. [4] zu finden. Die Grundannahme aller MF Techniken liegt in einer Korrelation zwischen den verschiedenen Levels, die eine mathematisch einfachere Struktur als das eigentliche HF Problem aufweist, sodass die Korrelation mittels eines kleinen Datensatzes auf HF Level modelliert und zur Korrektur des großen LF Datensatzes genutzt werden kann.

## Multi-Fidelity Daten

Während für die Wahl eines HF Modells in der Regel nur high-end numerische Simulationen oder Messdaten zur Auswahl stehen (wobei Messdaten für den Fall von numerischem Design i. d. R. ausgeschlossen werden können), bestehen für LF Modelle unterschiedliche Optionen, welche grob in drei Kategorien unterteilt werden können [4]:

- **Vereinfachte Modelle:** z. B. Physikalischen Vereinfachungen, Vereinfachungen der Problemstellung und numerische Vereinfachungen.
- **Unterraum-Projektionsmethoden:** z. B. Modale Reduktion, Proper Orthogonal Decomposition oder Krylov-Unterräume.
- **Datenbasierte Modelle:** z. B. Meta-Modelle wie lineare Regression, Gauss-Prozesse, künstliche neuronale Netze oder Padé-Approximation.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit allgemeinen FE Modellen im Frequenzbereich als HF Lösung, weshalb modellspezifische Vereinfachungen nicht betrachtet werden. Ferner ist bei Verwendung der Helmholtzgleichung unter der in der Akustik üblichen Vernachlässigung von nichtlinearen Termen und unter Annahme konstanter Temperatur keine weitere physikalische Vereinfachung möglich. Es bleiben somit im Allgemeinen Projektionsmethoden und numerische Vereinfachungen als naheliegendste Ansätze für ein LF Modell. Bei numerischen Vereinfachungen bietet sich eine Variation der Diskretisierung zur Erzeugung verschieden gut aufgelöster Ergebnisse an, da dieser Ansatz in anderen Anwendungsbereichen wie der Strukturmechanik bereits erfolgreich eingesetzt werden konnte, siehe z. B. [1, 6]. Eine Anwendung in akustischen Fragestellungen ist den Autoren z. B. von Ring [7]

bekannt, wobei hier heuristisch zwischen LF und HF Daten gewählt und kein Meta-Modell konstruiert wurde.

Da die Diskretisierung bei akustischen Modellen in der Regel unmittelbar an dem gewünschten Frequenzbereich orientiert ist, hat eine gröbere Diskretisierung direkten Einfluss auf das Ergebnis und es sind klare Grenzen zu erwarten, ab denen ein LF Modell höhere Frequenzen nicht mehr korrekt abbilden kann. Daraus leitet sich die konkrete Fragestellung ab, ob sich die Ergebnisse eines unterdiskretisierten Modells im Bereich zwischen *hinreichend genau* (min. 6-10 lineare Elemente pro Wellenlänge) und *komplettem Versagen* für ein MF Modell verwenden lassen.

## Akustischer Testfall

Als Testbeispiel wird das in Abb. 1 links gezeigte einfache, zweidimensionale Innenraumproblem im Frequenzbereich gelöst. Das Beispiel ist dabei bewusst so gewählt, dass sich in der Frequenzantwort möglichst viele Charakteristiken eines realistischen Anwendungsfalls wiederfinden, weshalb kein analytisch lösbares Problem gewählt wurde. Gelöst wird die 2D-Helmholtzgleichung, um die Frequenzantwort des Schalldrucks $P(f)$ an Position $\mathrm{P}_1$ im Bereich von 50 Hz bis 1000 Hz als Folge von einer über die Frequenz konstanten Neumann-Randbedingung $\bar{\nu}_n$ als Anregung zu berechnen. Als Randbedingungen liegt auf $\Gamma_0$ eine nichtreflektierende Randbedingung ($\rho c$) vor, während die verbleibenden Ränder $\Gamma$ mit einer Impedanzrandbedingung modelliert werden. Die komplexwertige Impedanz der Wände $Z_\Gamma$ bildet mit Real- und Imaginärteil die variablen Parameter des Systems, $Z_\Gamma = \varphi_1 + \mathrm{i}\cdot\varphi_2$. Der Parameterraum wird hochauflösend abgetastet, um einen hinreichend großen Datensatz für Training und Test von MF Modellen zu generieren. Insgesamt decken 5000 Parameterkonstellationen einen Bereich von 0.8460 bis 0.9897 für den Reflexionskoeffizienten ab (0.0206 bis 0.2843 Absorptionsgrad). Für die Diskretisierung des FE Modells werden Quad-Elemente zweiter Ordnung (8 Knoten) verwendet. Es werden zwei verschiedene Diskretisierungen als HF bzw. LF Modell verwendet, wie in Abb. 1 rechts dargestellt. Das HF Modell weist eine durchschnittliche Elementgröße von $h_{\mathrm{HF}} = 50\,\mathrm{mm}$ auf, das LF Modell hingegen $h_{\mathrm{LF}} = 150\,\mathrm{mm}$.

## Multi-Fidelity Ergebnisse

Die Auswirkung der LF Diskretisierung wird zunächst für die Frequenzantwort bei einem festen Parameter $\varphi = [9500, \quad 0]\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2 s}}$ betrachtet. In Abb. 2 (oben) sind die Frequenzantworten für HF und LF gezeigt. Die LF Lösung zeigt zwar eindeutige Ähnlichkeit zur HF Lösung, allerdings zeigt sich ein mit der Frequenz wachsender Fehler, der aus einer zunehmenden Verschiebung hin zu höheren Frequenz resultiert. Dieser Effekt ist in der Literatur als numerische Dispersion bei Wellenproblemen wohl bekannt und führt bei der Lösung mittels FEM, neben dem üblichen Interpolationsfehler, zusätzlich zu einem *Pollution Error* (PE), welcher für große Wellenzahlen dominant wird [8]. Der PE kann nur für sehr kleine Verhältnisse $\alpha = \frac{k(kh_{\mathrm{LF}})^p}{(2p)^p}$ mit Elementgröße $h$,

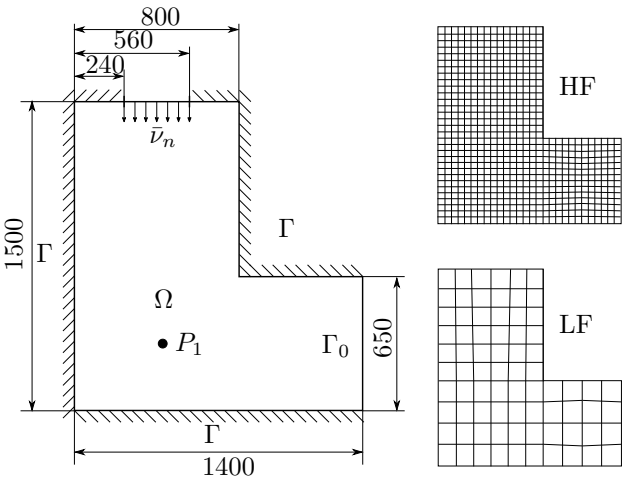


**Abbildung 1:** Testbeispiel eines akustischen Innenraums (links) und HF bzw. LF Diskretisierung (rechts). Alle Längenangaben in mm.

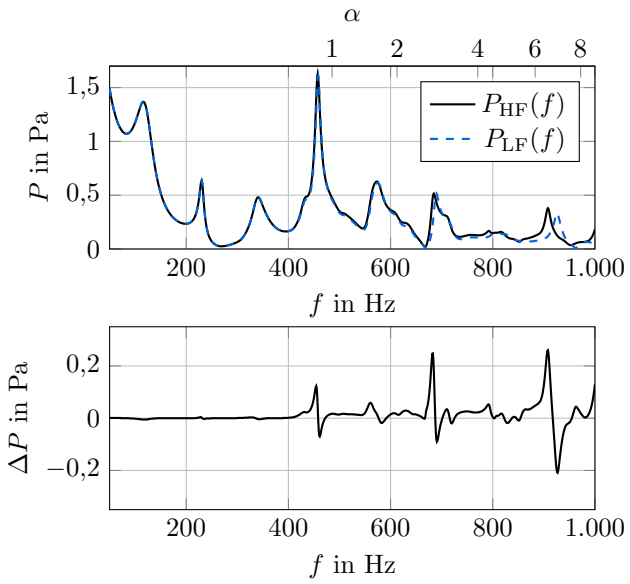


**Abbildung 2:** Frequenzantwort (oben) und Differenz (unten) des HF und LF Modells für einen festen Parametersatz

Elementordnung $p$ und Wellenzahl $k$ kontrolliert werden. In Abb. 2 ist dieses Verhältnis als zweite $x$-Achse mit angegeben. Wie von Oden et. al [9] gezeigt, ist der Fehler nur für $\alpha \ll 1$ kontrollierbar, was für das LF Modell bereits ab ca. 485 Hz nicht erreicht wird. Die Diskrepanz zwischen HF und LF wird somit vom PE dominiert, was in der in Abb. 2 (unten) dargestellten Differenz $\Delta P = P_{\mathrm{HF}} - P_{\mathrm{LF}}$ deutlich wird. Trotz der ähnlich aussehenden Verläufe ist die Differenz hochgradig nichtlinear und mitnichten glatter oder besser zu erlernen als die eigentliche HF Lösung. Diese Problematik ist generell zu erwarten, da auch mit heutigen Rechenkapazitäten die Diskretisierung auf HF Level so gewählt wird, dass Qualitätsindikatoren wie $\alpha$ nur knapp erfüllt werden. Es ist somit absehbar, dass eine hinreichend günstigere LF Lösung immer unter diesem Fehlerverhalten leiden wird. Während ein lineares MF Modell grundlegend ausgeschlossen werden kann, stellt sich weiter die Frage, ob eine

direkte Suche nach einem nichtlinearen Zusammenhang zielführend ist. Da die Diskrepanz tatsächlich primär nicht aus einem Zusammenhang zwischen den Ausgangswerten $P_{\mathrm{HF}}$ und $P_{\mathrm{LF}}$ entspringt, sondern auf eine Verzerrung der Eingangswerte $f_{\mathrm{HF}}$ und $f_{\mathrm{LF}}$ zurückzuführen ist, kann das Voraberlernen einer Transformation des Eingangswerte,

$$\tilde{f} = g(f_{\mathrm{LF}})\,, \tag{3}$$

vielversprechender sein als der Versuch, die Korrelation der Ausgangswerte zu erlernen. Es ist jedoch nicht zu erwarten, dass sich ein einfache funktionale Beschreibung der Verzerrung durch den PE finden lässt. Wie von Deraemaeker et al. [8] gezeigt, ist die aus dem PE resultierende Verzerrung bereits in 1D für Verhältnisse $kh > 1$ chaotisch. Hinzu kommt, dass in zwei- oder dreidimensionalen Problemen auch die Richtung der Wellenlänge bzw. ihre Ausrichtung bezüglich des FE-Netzes Einfluss auf den Fehler hat [8]. Da sich die Wellenausbreitung bei einer komplexeren Geometrie mit jeder Frequenz verändert, ergeben sich somit für jede einzelne Frequenz zwei unvorhersehbare Einflussfaktoren auf den PE.

Es ist wenig aussichtsreich, eine globale Transformation zu suchen, wenn das zugrundeliegende Verhalten lokal quasi-zufälligen Charakter erwarten lässt. Daher ist es naheliegend, sich lokal auf die Bereiche zu konzentrieren, in denen der PE den größten Schaden anrichtet, also den Peaks in der Frequenzantwort. Ähnlich wie in [10] können einzelne charakteristische Punkte wie Peaks oder Minima als Stützstellen verwendet werden, um die Frequenzverschiebung $\Delta f_{\mathrm{LF}}(f)$ zu beschreiben. Ein interpolierendes Verhalten ist hierbei explizit erwünscht, damit die Differenzen an den Peaks bestmöglich getroffen werden, während das Verhalten zwischen den Peaks von untergeordneter Bedeutung ist. In Abb. 3 (oben) sind jeweils die Peaks und die dazwischenliegenden Minima als charakteristische Frequenzen und in der unteren Grafik die Entwicklung der Frequenzverschiebung für diese Punkte gezeigt. Es zeigt sich der zu erwartende Trend eines nichtlinear mit der Frequenz wachsenden Fehlers, sobald der zulässige Bereich des Modells verlassen wird, wobei auch das zuvor diskutierte, ungleichmäßige Verhalten zu beobachten ist.

Als Ansätze für $g(f_{\mathrm{LF}})$ sind, ebenfalls in Abb. 3 dargestellt, stückweise lineare und kubische Spline-Interpolationen sowie eine Regression mittels eines Exponentialterms zu sehen. Die gezeigten Ansätze sind exemplarisch für den Vergleich von stückweiser bzw. glatter Interpolation und Regression gewählt. Abbildung 4 zeigt die Diskrepanzen und LF Frequenzantworten im relevanten Bereich ab 400 Hz für die drei verschiedenen Ansätze zur Beschreibung der Frequenztransformation. Es zeigt sich, dass das Regressionsmodell, auch wenn es insgesamt den Trend sehr gut erfasst, an den kritischen Positionen der Peaks keine minimale Verschiebung zwischen HF und LF liefert, sodass die Diskrepanz nahe der Peaks weiterhin sehr groß ist. Die lineare und Spline-Interpolation reduzieren das nichtlineare Fehlerverhalten nahe der Peaks erheblich und liefern deutlich glattere Verläufe.
Die hier gezeigte Transformation ist nur eine ad-hoc

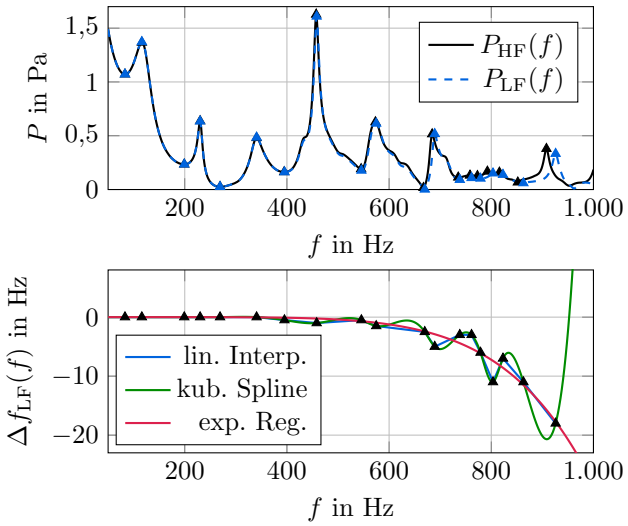


**Abbildung 3:** Charakteristische Punkte (oben) und zugehörige Frequenzverschiebung (unten), approximiert mit linearer Interpolation, kubischen Splines und exponentieller Regression

Lösung für die Frequenzantwort einer einzigen Parameterkonstellation. Für ein MF Modell wird eine solche Transformation jedoch entsprechend über den gesamten Parameterraum benötigt. Wie sich ein Parameter auf die Modellantwort auswirkt, ist selbstverständlich in jedem Modell anders. Da die meisten typischen Parameter (Material, Geometrie, Randbedingungen) den Verlauf der Frequenzantwort und nicht nur die Amplitude verändern, ist abzusehen, dass sich die charakteristischen Frequenzen für das Modellieren der Frequenzverschiebung verändern. Zusätzlich können auch vollkommen neue Peaks dazukommen. Gleichermaßen wird auch die Wellenausbreitung von den Parametern beeinflusst, sodass sich beide Einflussfaktoren des PE über den Parameterraum verändern. In Abb. 5 ist die Frequenzverschiebung über den Parameterraum von $\varphi_2$ aufgetragen. Wie vermutet, sind die Fehler an den charakteristischen Punkten ohne erkennbare Systematik schwankend und somit kaum erlernbar.

Das unvorhersehbare Fehlerverhalten in sowohl Frequenz- als auch Parameterrichtung erfordert eine sehr feine Auflösung der Modelle in Frequenzrichtung für eine große Zahl von Parametern, gleichermaßen vom HF als auch vom LF Modell. Die zahlreichen HF Auswertungen würden hier der Idee eines MF Modells unmittelbar widersprechen. Verwendet man wenige Daten zur Beschreibung der Transformation, erhält man zwar, wie in Abb. 3 oben zu sehen, deutlich glattere Diskrepanzen in der Umgebung der Peaks, dafür wird allerdings im gesamten restlichen Gebiet quasi willkürlich skaliert. Das führt wiederum dazu, dass alle dort sonst erkennbaren Strukturen in der Korrelation, die ein MF Modell lernen sollte, stark gestört werden. Bisher führten diese Effekte dazu, dass es den Autoren nicht möglich war, mit einem sinnvoll großen Datensatz ein zuverlässig trainierbares MF Modell für die beschriebene Problemstellung zu finden.

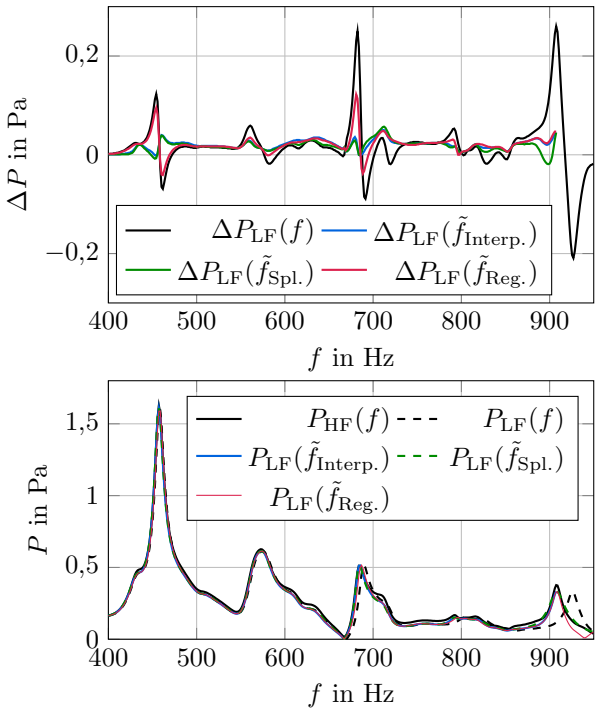


**Abbildung 4:** Differenzen (oben) und skalierte Frequenzantworten (unten)

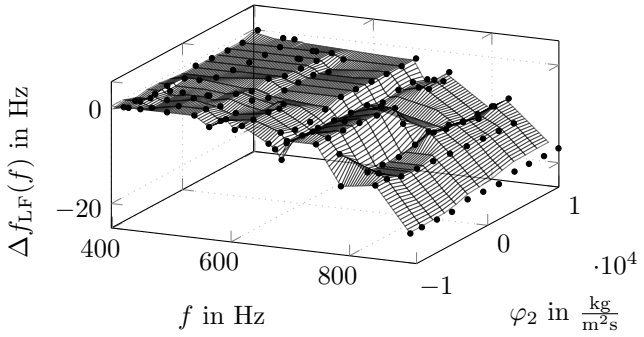


**Abbildung 5:** Lineare Interpolation der Frequenzverschiebungen für verschiedene Parameterwerte $\varphi_2$

## Fazit und Ausblick

Multi-Fidelity Ansätze bilden in vielen Anwendungsbereichen außerhalb der Akustik eine vielversprechende Option für effiziente numerische Simulationen. Der oft naheliegendste Ansatz einer vergröberten Diskretisierung zur Erzeugung von LF Daten führt in akustischen Modellen jedoch zu einem Dispersionsfehler, welcher zu einer unstrukturierten Korrelation der Eingangs- und nicht der Ausgangsräume der Modellebenen führt. Diese Korrelation lässt sich zwar mit einfachen Mitteln approximieren, jedoch sind für eine global hinreichend genaue Transformation mehr Daten nötig, als in einem üblichen MF Konzept vertretbar wäre.

Insgesamt erscheint die Verwendung von gröberen Diskretisierungen zur Erzeugung von LF Modellen in der Akustik nicht vielversprechend. Für ein finales Urteil steht jedoch noch die Erprobung von einigen state-of-the-art MF Modellen aus. Gerade im Feld der künstlichen neuronalen Netze, aber auch bei Gauss-Prozessen, sind derzeit auch Modelle in der Entwicklung, die mehrere Datenebenen und Transformationen der Eingangräume ermöglichen.

Die offensichtlichen Schwierigkeiten mit gröberen Diskretisierungen führen zwangsläufig zum Blick auf alternative Möglichkeiten, LF Daten zu erzeugen. Im Falle der Akustik sind reduzierte Modelle die naheliegendste Wahl, wobei insbesondere Krylov-Unterraumverfahren zu guten Ergebnissen führen können. Ob auf diesem Wege erzeugte reduzierte Modelle für MF Ansätze geeignet sind oder ob auf diesem Wege keine Verbesserung erlangt werden kann, gilt es noch zu zeigen.

## Literatur

[1] Biehler, J., Gee, M. W. und Wall, W. A.: Towards efficient uncertainty quantification in complex and large-scale biomechanical problems based on a Bayesian multi-fidelity scheme. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 14 (2015), 489–513

[2] Heinrich, S.: Monte Carlo complexity of global solution of integral equations. Journal of Complexity 14 (1998), 151–175

[3] Kennedy, M. C. und O'Hagan, A.: Predicting the output from a complex computer code when fast approximations are available. Biometrika 87 (2000), 1–13

[4] Peherstorfer, B., Willcox, K. und Gunzburger, M.: Survey of multifidelity methods in uncertainty propagation, inference, and optimization. SIAM Review 60 (2018), 550–591

[5] Hetmaniuk, U., Tezaur, R., und Farhat, C.: Review and assessment of interpolatory model order reduction methods for frequency response structural dynamics and acoustics problems. Intern. Journal for Num. Methods in Engineering 90 (2012), 1636–1662

[6] Sun, G., Li, G., Stone, M. und Li, Q.: A two-stage multi-fidelity optimization procedure for honeycomb-type cellular materials. Computational Materials Science, 49 (2010), 500–511

[7] Ring, T. P.: Effiziente Unsicherheitsquantifizierung in der Akustik mittels eines Multi-Modell-Verfahrens. Dissertation. Shaker Verlag, Düren (2020)

[8] Deraemaeker, A., Babuška, I. und Bouillard, P.: Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions. Intern. Journal for Num. Methods in Engineering 46 (1999), 471–499

[9] Oden, J. T., Prudhomme, S. und Demkowicz, L.: A posteriori error estimation for acoustic wave propagation problems. Archives of Computational Methods in Engineering 12 (2005), 343–389

[10] Yaghoubi, V., Marelli, S., Sudret, B. und Abrahamsson, T.: Sparse polynomial chaos expansions of frequency response functions using stochastic frequency transformation. Probabilistic Engineering Mechanics 48 (2017), 39–58