# Adjungierten-basierte Schallfelderzeugung im Zeitbereich mit Zielfunktion im Frequenzraum

Pascal Seeler[1], Arne Hölter[2], Stefan Weinzierl[2], Mathias Lemke[1]
[1] *Technische Universität Berlin, Fachgebiet für Numerische Fluiddynamik, Berlin, Email: seeler@tnt.tu-berlin.de*
[2] *Technische Universität Berlin, Fachgebiet für Audiokommunikation, Berlin*

## Einleitung

In vorangegangenen Beiträgen [3][4][5][7][8] haben die Autoren eine Methode zur Adjungierten-basierten Optimierung von Lautsprecher-Arrays im Zeitbereich vorgestellt. Mit dieser Methode lassen sich grundsätzlich nicht nur der optimale Ort, sondern auch optimale Treiberfunktionen für beliebige Anordnungen von Lautsprechern finden.

In dem vorliegenden Beitrag stellen die Autoren eine Erweiterung der Methode vor, die die Vorgabe von gewünschten Schallamplituden im Frequenzbereich ermöglicht. Die Methode erlaubt es, die typischerweise Frequenz-basiert definierten akustischen Anforderungen an ein Beschallungsszenario mit den Vorteilen eines Zeitbereichsverfahrens zu kombinieren, etwa die Einbeziehung von Rand- und Umgebungsbedingungen wie Wind.

Die Validierung des Verfahrens erfolgt an Beispielen von in der Beschallungstechnik typischen Szenarien, in denen räumlich verschiedene Werte für die Schallamplituden angestrebt werden.

## Theorie

Das Adjungierten-Verfahren wird bereits in vielen Bereichen der Fluiddynamik erfolgreich zur Optimierung von numerischen Modellen eingesetzt [1]. Eine Erweiterung des Verfahrens zur Definition von Zielen im Frequenzraum ist notwendig, um die in der Akustik üblichen Problemstellungen zu lösen.

## Adjungierten-basierter Ansatz

Das Adjungierten-Verfahren ist üblicherweise im Zeitbereich definiert [4]. Mithilfe der Adjungierten-Gleichung in diskreter Form wird ein sogenanntes Zielfunktional $J$ optimiert. $J$ ist dabei ein Skalar und wird wie folgt definitert:

$$J = g^T q, \tag{1}$$

mit dem Zustandsvektor $q = q(\vec{x}, t)(\rho, u, p)$ und einem Gewichtungsfaktor $g$. Das Zielfunktional $J$ ist ein Designparameter, der die Nähe der Optimierungsgröße zum gewünschten Zielwert beschreibt, typischerweise wird ein Minimum angestrebt. Der Faktor $g$ ist die Lösung des Systems

$$A^T q^* = g, \tag{2}$$

wobei $A^T$ die transponierte Matrix der beschreibenden Ausgangsgleichung $Aq = f$ ist. Die Variable $q^*$ wird als Adjungierte Zustandsvariable bezeichnet. Mithilfe der Beziehung

$$J = g^T q = \left(A^T q^*\right) q = {q^*}^T A q = {q^*}^T f \tag{3}$$

lässt sich ein Zusammenhang zwischen dem Zielfunktional $J$ und der rechten Seite $f$ herstellen. Dieser Zusammenhang erlaubt es, das Zielfunktional mithilfe von Gleichung (2) als numerisch günstiges Skalarprodukt zu berechnen. Der adjungierte Zustandsvektor $q^*$ kann als Gradient in Optimierungsrichtung interpretiert werden.

Für den vorliegenden Anwendungsfall kann das Zielfunktional $J$ definiert werden als:

$$J = \frac{1}{2} \int_\Omega \int_t \left(q - q_{\mathrm{ref}}\right)^2 \sigma(\vec{x}, t) \ \mathrm{dt} \ \mathrm{d}\Omega. \tag{4}$$

Da wir ausschließlich an der Druckdifferenz zwischen Referenz- und Instantanschallfeld interessiert sind, wird $q - q_{\mathrm{ref}}$ zu $p' - p'_{\mathrm{ref}}$. Der Term $\sigma(\vec{x}, t)$ beschreibt einen Gewichtungsfaktor. Dieser bestimmt, an welchen Orten der Rechendomain und zu welchen Zeiten die Druckdifferenz ausgewertet wird. So können Randeffekte und eventuell auftretende Einschwingvorgänge behandelt werden.

Die Minimierung von $J$ ist ein iterativer Prozess. Die Verteilung der Quellen $f$ wird zunächst vorgegeben und die beschreibenden Gleichungen vorwärts in der Zeit gelöst. Auf oben beschriebene Weise werden daraus das Zielfunktional $J$ und der Faktor $g$ bestimmt. Anschließend werden die adjungierten Euler-Gleichungen rückwärts (mit diskretem Zeitschritt $-\Delta t$) berechnet, um den Zustandsvektor $q^*$ zu erhalten. Dies führt letztendlich auf den Gradienten $\nabla_f J$, der benutzt wird, um die Quellen im Iterationsschritt $n$ nach

$$f^{n+1} = f^n + \alpha \nabla_f J \tag{5}$$

neu zu setzen. Der Parameter $\alpha$ beschreibt hierbei die Schrittweite der Gradienten-Optimierung. Die neue Quellenverteilung $f^{n+1}$ dient als Ausgangspunkt für die nächste Vorwärtsrechnung. Der Prozess wird so lange wiederholt, bis die gewünschte Konvergenz oder die maximal vorgegebene Anzahl an Loops erreicht wurde. Eine ausführliche Herleitung von Gleichung (2) und die Beschreibung des iterativen Optimierungsalgorithmus finden sich in [2].

## Transformation in den Frequenzraum

Wie in [6] gezeigt wurde, kann Gleichung (4) in folgende Entsprechung überführt werden:

$$J = \int\int p'\ \sigma dt\ d\Omega \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int\int |P'\left(\vec{x},\omega\right)|\,\sigma\ \mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}\Omega, \tag{6}$$

mit $p' = p'\left(\vec{x},t\right)$ und $\sigma = \sigma(\vec{x},t)$ bzw. $\sigma = \sigma(\vec{x},\omega)$. Die Transformation in den Frequenzraum erlaubt es, die Optimierung des Zielfunktionals $J$ als Reduktion der Differenz der Schallamplituden $|P(\vec{x},t) - P_{\mathrm{ref}}(\vec{x},t)|$ zu betrachten.

Die Transformation in den Frequenzraum erzeugt aus $n$ Zeitschritten $(n+1)/2$ diskrete Frequenzen $f(\vec{x},\omega)$. Die gewünschte Amplitudenverteilung kann für beliebige Punkte innerhalb der Geometrie und für diskrete Frequenzen bis zur Samplingfrequenz aufgeprägt werden.

Die Amplitudendifferenz $P - P_{\mathrm{ref}}$ wird anschließend mittels einer weiteren Fourier-Transformation zurück in den Zeitbereich transformiert. Es wurde gezeigt [6], dass die Minimierung des Amplitudenverhältnisses einer Minimierung der Differenz der Schalldrücke $p' - p'_{\mathrm{ref}} = g$ entspricht. Die Gewichtung $g$ kann somit wieder in Gleichung (2) eingesetzt werden, um die rechte Seite $f$ für den nächsten Loop des iterativen Verfahrens zu erhalten.

## Numerisches Setup

Einfache Testfälle für das oben beschriebene Verfahren in 2D und 3D seien im Folgenden beschrieben. Für beide Simulationen wurde ein zentrales Schema vierter Ordnung für die räumliche Diskretisierung benutzt, die Zeitintegration basiert auf einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Es wurden in beiden Setups Charakteristikenbasierte, nicht-reflektierende Randbedingungen implementiert. Um numerische Stabilität zu gewährleisten, werden implizite räumliche Filter von sechster Ordnung eingesetzt. Unerwünschte Reflexionen werden vermieden, indem ein zwei- bzw. dreidimensionaler Spongelayer mit einer Länge von 30 Punkten an allen Geometrierändern verwendet wurden. Die Samplingfrequenz, mit der die akustischen Signale abgetastet wurden, ist $f_{\mathrm{s}} = 48$ kHz, es gilt $\Delta t = 1/fs$.

## 2D Setup

Das zweidimensionale Rechengebiet ist in Abb. 1 dargestellt und besteht aus $4 \cdot 10^4$ Raumpunkten ($n_{\mathrm{x}} = 288$, $n_{\mathrm{y}} = 138$), die räumliche Auflösung beträgt etwa 1 cm pro Punkt. Simuliert werden insgesamt 10 Loops mit jeweils 1200 Zeitschritten.

Für den 2D-Fall wird ein einfaches Setup mit zwei in y-Richtung übereinanderliegenden Speakern und zwei Optimierungszonen (siehe Abb. 1) verwendet. Beide Lautsprecher erzeugen überlagerte Sinuswellen mit Frequenzen von 1000 Hz und 2500 Hz und jeweils gleicher Amplitude. Für die Optimierung wird das Zielschallfeld

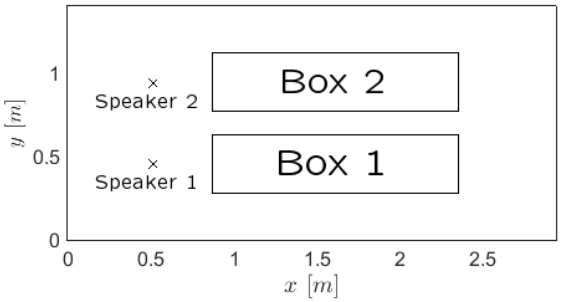


**Abbildung 1:** Lage und Ausrichtung der Lautsprecher und Kontrollvolumina (Boxen).

im Frequenzraum so definiert, dass die Schallamplitude innerhalb von Box 2 um 6 dB sinken soll. Des Weiteren wird die Auslöschung des 2500 Hz-Anteils der akustischen Wellen in beiden Kontrollvolumen gefordert.

## 3D Setup

Das dreidimensionale Rechengebiet umfasst $4{\cdot}10^6$ Punkte ($n_{\mathrm{x}} = 199$, $n_{\mathrm{y}} = 199$, $n_{\mathrm{z}} = 99$), die räumliche Auflösung ist ähnlich der des 2D-Setups. Simuliert werden insgesamt 20 Loops mit je 1300 Zeitschritten.

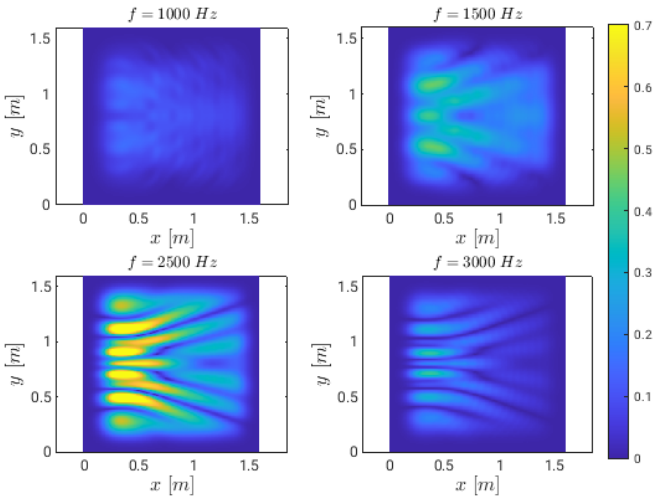


**Abbildung 2:** Zielschallfeld im Frequenzraum, exemplarisch für Frequenzen $f_1 = 1000$ Hz, $f_2 = 1500$ Hz, $f_3 = 2000$ Hz und $f_4 = 2500$ Hz, jeweils normiert auf die Maximalamplitude.

Als Schallquellen werden insgesamt fünf Monopole definiert, die parallel entlang einer Achse angeordnet sind und einen Sweep zwischen 1000 Hz und 3000 Hz erzeugen. Alle Monopole haben zu Beginn der Optimierung dieselbe Amplitude, es existiert kein Phasenversatz. Als Optimierungsziel ist das Schallfeld definiert, das in Abb. 2 dargestellt ist. Es wurde in einer vorhergehenden Vorwärtsrechnung generiert und entsteht dadurch, dass die Lautsprecher jeweils einen Phasenversatz von $2\Delta t$ zueinander haben. Außerdem ist das Amplitudenverhältnis zwischen je zwei benachbarten Lautsprechern als $P_{n+1} = P_n/2^n$ gegeben. Die Adjungierte soll das abgebildete Zielschallfeld durch Anpassung aller Lautsprecher hinsichtlich Amplitude und Phasenlage rekonstruieren. Zu untersuchen ist, ob eine Minimierung des Ziel-

funktionals $J$ im Frequenzbereich einer Annäherung an die gewünschte Amplitudenverteilung entspricht.

## Auswertung

Die Ergebnisse der beiden oben vorgestellten Testfälle werden im Folgenden beschrieben.

## 2D Testfall

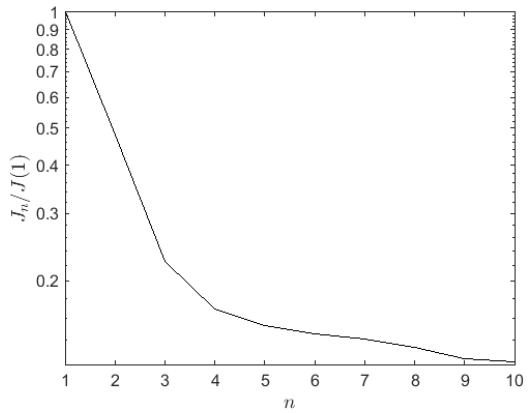


**Abbildung 3:** Verlauf des Zielfunktionals $J$ über $n = 10$ Loops, in Relation zum Wert $J(1)$ des ersten Loops

Abb. 3 zeigt den Verlauf des Zielfunktionals $J$ über die gerechneten 10 Loops relativ zum Wert $J(1)$, dem Wert des Zielfunktionals nach der ersten Vorwärtsrechnung. Das Zielfunktional erfährt bereits innerhalb der ersten vier Iterationen eine drastische Reduktion, nach 10 Loops ist die Rechnung konvergiert. Die Reduktion von $J$ deutet nach o. g. Ausführungen auf eine Reduktion der Schalldruckdifferenz $p' - p'_{\mathrm{ref}}$ hin.

In Abb. 4 ist das Amplitudenspektrum nach der Optimierung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der 2500 Hz-Anteil der akustischen Lösung im Mittelwert über alle Punkte innerhalb der beiden Kontrollvolumen geringer ausfällt als die Amplitude der Hintergrundschwankungen, die Differenz zur Ausgangsamplitude

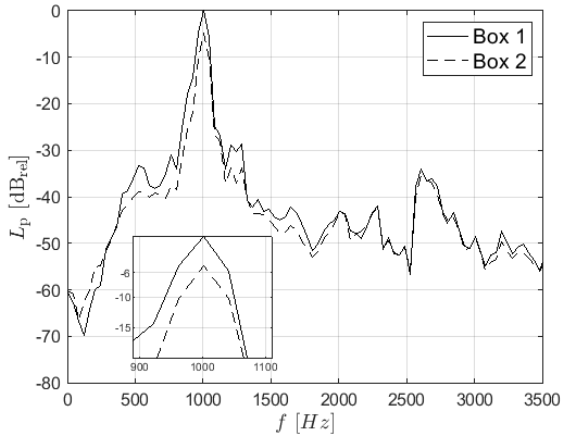


**Abbildung 4:** Amplitudenspektrum nach der Optimierung (10 Loops) relativ zum Maximum in Box 1, Ausschnitt des Spektrums um 1000 Hz (Inset).

beträgt etwa 50 dB. Die Optimierung hat diese Frequenz somit wie gewünscht vollständig auslöschen können. Des Weiteren konnte eine deutliche Reduktion der Schallamplitude in Box 2 im Vergleich zu Box 1 erreicht werden. Die mittlere Abweichung der Amplitude für Frequenzen zwischen 500 Hz und 2000 Hz beträgt ca. 4 dB. Im Optimierungsbereich um 1000 Hz ist zu sehen (Abb. 4, Inset), dass die Schallamplitude in Box 2 um etwa 5 dB reduziert wurde. Dieses Ergebnis deckt sich daher sehr gut mit den oben definierten Optimierungszielen.

## 3D Testfall

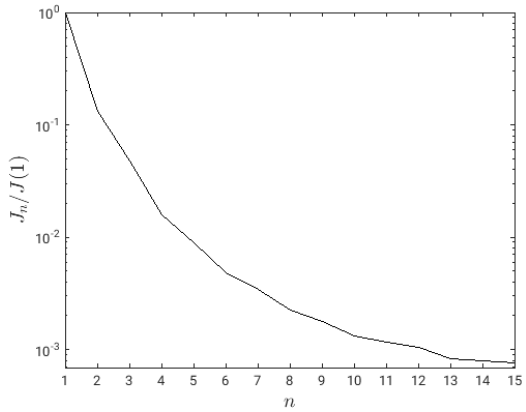


**Abbildung 5:** Verlauf des Zielfunktionals $J$ über $n = 15$ Loops, in Relation zum Wert $J(1)$ des ersten Loops.

Abb. 5 zeigt den Verlauf des Zielfunktionals $J$ über 15 Loops im Verhältnis zu $J(1)$. Das Zielfunktional wurde um mehr als zwei Größenordnungen reduziert. Wie oben beschrieben, deutet eine Minimierung des Zielfunktionals auf eine Reduktion der Differenz zwischen Zielspektrum und berechnetem Spektrum hin.

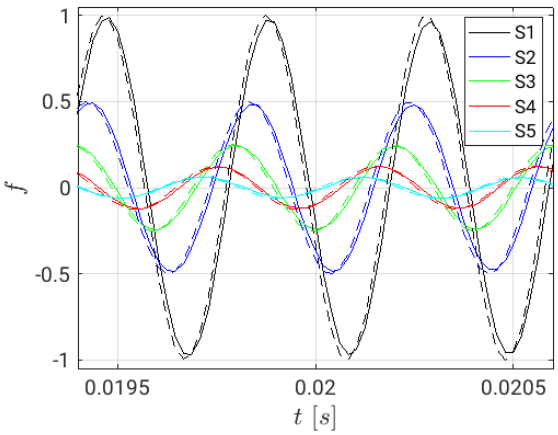


**Abbildung 6:** Ausschnitt aus dem Verlauf der akustischen Anregung $f$ für Speaker 1 bis Speaker 5 (S1 bis S5), Ergebnis der Optimierung (durchgezogene Linie) und Ziel (gestrichelt).

In Abb. 6 ist der Vergleich zwischen der gewünschten akustischen Anregung und der nach der Optimierung errechneten Anregung dargestellt. Der gezeigte Ausschnitt entspricht 48 Zeitschritten und ist repräsentativ für den Anregungsverlauf über den gesamten Sweep

(1300 Zeitschritte, Ein- und Ausschwingvorgänge wurden nicht betrachtet). Der Anregungsverlauf der optimierten Lösung stimmt in Phasenlage und der Amplitude sehr gut mit dem Ziel überein. Der Phasenversatz von $2\Delta t$ zwischen den Lautsprechern wurde erreicht, ebenso das gewünschte Amplitudenverhältnis benachbarter Lautsprecher. Das Ergebnis bedeutet, dass die adjungierte Optimierung in der Lage ist, aus einer zunächst homogenen Signalabstrahlung der einzelnen Lautsprecher eine Abstrahlung zu erreichen, um das gewünschte im Frequenzraum definierte Zielschallfeld zu erzeugen.

## Zusammenfassung

Es wurde die Implementierung einer Zielfunktion im Frequenzraum vorgestellt, die es ermöglicht, die Vorteile der im Zeitbereich durchgeführten adjungierten Optimierung mit den Anforderungen an reale akustische Problemstellungen zu kombinieren. Die Transformation dieses Zielfunktionals erhält dessen Charakter als Designgröße, die die Qualität einer Optimierung beschreibt. Es wurde anhand zweier Simulationen gezeigt, dass im Frequenzraum definierte Schallfelder rekonstruiert werden können.

Diese neue Implementierung kann auf verschiedene Weise erweitert werden. Es lassen sich komplexere Beschallungssituationen (Kombinationen von Geometrien, Lautsprechern und Zielfeldern) ohne nennenswerten numerischen Mehraufwand simulieren. Zudem besteht die Möglichkeit, nichtlineare Effekte in die Optimierung mit einzubeziehen. Der größte Vorteil an der vorgestellten Implementierung besteht in der Erweiterung der akustischen Anwendungsfälle. Von großem Interesse sind hierbei psychoakustische Effekte wie beispielsweise Sprachverständlichkeit, da solche Probleme häufig im Frequenzraum definiert sind.

## Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung im Rahmen der Projekte LE 3888/2 und WE 4057/16.

## Literatur

[1] M. B. Giles und N. A. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2000.

[2] M. Lemke. *Adjoint based data assimilation in compressible flows with application to pressure determination from PIV data.* dissertation, Technische Universität Berlin, 2015.

[3] M. Lemke, L. Stein, A. Hölter, F. Straube, und S. Weinzierl. Synthese komplexer Richtcharakteristiken für eine Schallfeldoptimierung im Zeitbereich. In *Fortschritte der Akustik - DAGA 2020*, pages 1192–1195, 2020.

[4] M. Lemke, F. Straube, F. Schultz, J. Sesterhenn, und S. Weinzierl. Adjoint-based time domain sound reinforcement. In *Audio Engineering Society Conference: 2017 AES International Conference on Sound Reinforcement – Open Air Venues*, Aug 2017. featured in Ramsey, F. (2017): 'Sound Reinforcement in the Open Air.' In: J. Audio Eng. Soc., vol. 65, no. 12, pp. 1051 - 1055 (December).

[5] M. Lemke, F. Straube, J. Sesterhenn, und S. Weinzierl. Adjungierten-basierte Schallfeldsynthese und Beschallung. In *Fortschritte der Akustik - DAGA 2017*, pages 1422–1425. Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V., 2017. ISBN: 978-3-939296-12-6.

[6] J. Schulze, P. Schmid, und J. Sesterhenn. Iterative optimization based on an objective functional in frequency-space with application to jet-noise cancellation. *Journal of Computational Physics*, 230(15), 2011.

[7] L. Stein, F. Straube, J. Sesterhenn, S. Weinzierl, und M. Lemke. Adjoint-based optimization of sound reinforcement including non-uniform flow. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 146(3):1774–1785, 2019.

[8] L. Stein, F. Straube, S. Weinzierl, und M. Lemke. Directional sound source modeling using the adjoint euler equations in a finite-difference time-domain approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 148(5):3075–3085, 2020.