Rekonstruktion von Temperaturverteilungen aus Ultraschall-Laufzeitmessungen

Michael Schwarz[1], Bernhard G. Zagar[1]

[1] *Institut für Elektrische Messtechnik, Johannes Kepler Universität Linz, 4040 Linz, Österreich,*
Email: michael.schwarz@jku.at

Einleitung

Die kontaktlose Messung von Temperaturverteilungen ist in vielen Anwendungsgebieten von Interesse. Ein Beispiel hierfür ist die Überwachung der Prozesstemperatur und die Lokalisation möglicher Hotspots in Bioreaktoren.

Wegen der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von Fluiden kann deren Temperatur aus der Laufzeit des Schalls bestimmt werden. Für ideale Gase ist der Zusammenhang zwischen Schallgeschwindigkeit c und absoluter Temperatur T in K nach

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{\mu}} \tag{1}$$

gegeben [1]. Dabei bezeichnet κ den Isentropenexponent, R die allgemeine Gaskonstante und μ das Molekulargewicht des Gases. Für Flüssigkeiten kann die Abhängigkeit $c(\vartheta)$, wobei ϑ die Temperatur in °C bezeichnet, im Allgemeinen nicht exakt in ähnlicher Form wie Gleichung (1) angegeben werden. Für Wasser wird deshalb meist ein experimentell gefundener Zusammenhang, wie in [2] in Form eines Polynoms 5. Ordnung angegeben, verwendet.

Aus der Laufzeit von Ultraschall kann nur die mittlere Schallgeschwindigkeit $\overline{c}$ zwischen Sender und Empfänger ermittelt werden. Diese ergibt sich für den strömungsfreien Fall nach

$$\overline{c} = \frac{l}{t_0} = l \left(\int_\gamma \frac{1}{c(\vartheta(\gamma))} \mathrm{d}s \right)^{-1}, \tag{2}$$

wobei γ den Integrationsweg der Länge l zwischen Sender und Empfänger und t_0 die für diesen Weg benötigte Laufzeit bezeichnet. Wie aus Gleichung (2) ersichtlich wird, erfolgt die Integration über dem Kehrwert der von der örtlichen Temperaturverteilung abhängigen Schallgeschwindigkeit. Aus diesem Grund und wegen der Nichtlinearität von $c(\vartheta)$ weicht die aus der gemessenen mittleren Schallgeschwindigkeit berechnete Temperatur $\vartheta(\overline{c})$ leicht von der tatsächlichen mittleren Temperatur $\overline{\vartheta}$ ab.

Wird die mittlere Schallgeschwindigkeit entlang mehrerer Pfade in einer Ebene gemessen, kann daraus eine Schätzung für die Temperaturverteilung in dieser Ebene rekonstruiert werden. Dafür muss allerdings ein schlecht gestelltes inverses Problem gelöst werden, was die Verwendung geeigneter Rekonstruktionsalgorithmen erforderlich macht. Damit beschäftigt sich der weitere Beitrag. Zuerst wird die Messung von Temperaturverteilungen genauer betrachtet. Anschließend werden die verwendeten Methoden zur Rekonstruktion sowie damit erzielte Ergebnisse vorgestellt.

Messung von Temperaturverteilungen

Für die Messung der Temperaturverteilung in Flüssigkeiten werden 16 piezoelektrische Transducer gleichmäßig über den Umfang eines runden Beckens verteilt. Jeder Transducer ist bündig in einer Bohrung positioniert und wasserdicht verklebt. Er befindet sich also in direktem Kontakt zum Messmedium, weshalb Transducer eingesetzt werden, bei denen das Piezoelement durch ein Kunststoffgehäuse geschützt ist. Die verwendeten Transducer haben eine Resonanzfrequenz von $f = 1\,\mathrm{MHz}$ sowie einen aktiven Durchmesser von 10 mm und weisen daher ein stark gerichtetes Abstrahlverhalten auf. Das Ergebnis einer Schallfeldkartierung mit einem Transducer dieses Typs ist in [3] zu sehen. Aufgrund der gerichteten Abstrahlung sind von den aus 16 Transducern theoretisch resultierenden 120 möglichen direkten Messpfaden nur 56 nutzbar. Durch Ausnutzung der Reflexion der Schallwellen an der Wand des Beckens können weitere 32 Pfade verwendet werden, wodurch sich eine Gesamtzahl von 88 Pfaden ergibt. Alle nutzbaren Pfade für einen sendenden Transducer zeigt Abbildung 1. In Abbildung 2 ist das aus Acrylglas gefertigte Messbecken mit den 16 Transducern zu sehen.

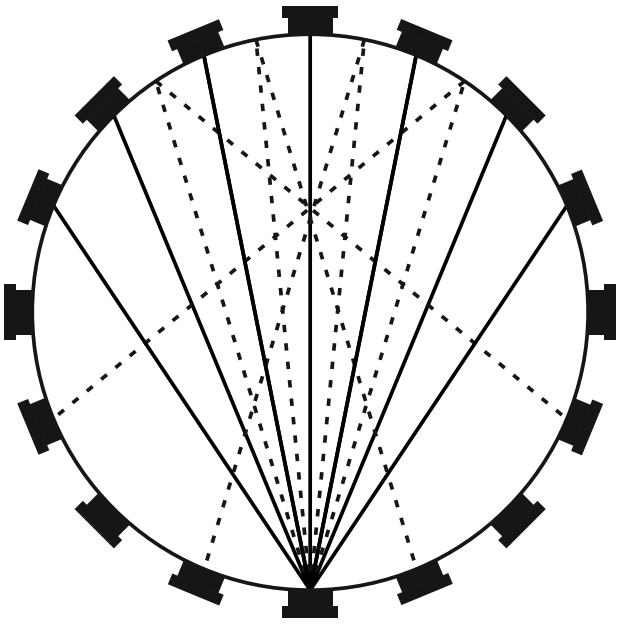

Abbildung 1: Für einen Sendetransducer aufgrund seiner Abstrahlcharakteristik verwendbare Messpfade direkt (durchgezogen) und mit Reflexion an der Beckenwand (gestrichelt).

Zur Erzeugung des Sendesignals wird der Ultraschall-Pulser STHV748 von *STMicroelectronics* verwendet, zur Digitalisierung des Empfangssignals ein Oszilloskop. Da die Transducer für verschiedene Pfade sowohl als Sender

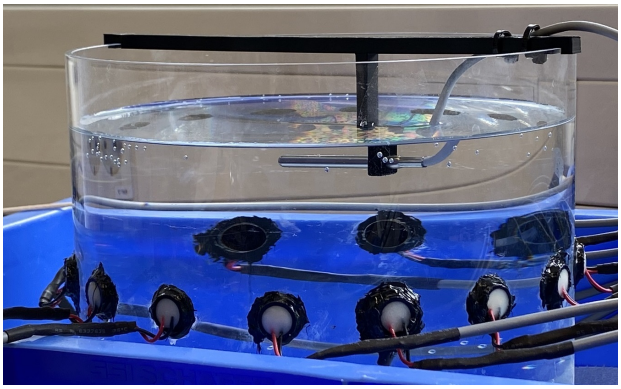

Abbildung 2: Becken aus Acrylglas mit einem Innendurchmesser von 194 mm und 16 gleichmäßig über dem Umfang verteilten Transducern zur Messung der Temperaturverteilung. Oben im Bild ist ein Pt1000 Temperatursensor zu sehen, der für Referenzmessungen verwendet wird.

als auch als Empfänger genutzt werden müssen, sind diese über eine Elektronik, die das Umschalten ermöglicht, mit Pulser und Oszilloskop verbunden. Diese Elektronik besteht aus 16 Relais mit Umschaltkontakt und einem 16:1 Multiplexer, die von einem Mikrocontroller gesteuert werden. Durch die Relais erfolgt jeweils das Umschalten zwischen Sende- und Empfangsmodus, mit dem Multiplexer wird der Empfangswandler ausgewählt, dessen Signal an das Oszilloskop weitergegeben wird.

Die aufgenommenen Empfangssignale für alle Messpfade werden an einen PC übertragen und zur Bestimmung der jeweiligen Schalllaufzeit mit Referenzsignalen bekannter Laufzeit verglichen. Die Zeitdifferenz zwischen gemessenem Signal und Referenzsignal kann entweder durch Berechnung der Kreuzkorrelation oder durch Auswertung des Kreuzleistungsdichtespektrums beider Signale geschätzt werden [4]. Beide Methoden führen zu ähnlich guten Ergebnissen. Die Standardabweichung der Laufzeitmessung beträgt weniger als 1 ns, was bei Raumtemperatur und der gewählten Geometrie einer Standardabweichung der mittleren Temperatur entlang des gemessenen Pfads von weniger als 4 mK entspricht.

Um aus den gemessenen Laufzeiten die örtliche Verteilung der Schallgeschwindigkeit und in weiterer Folge der Temperatur zu erhalten, werden die im Folgenden beschriebenen Rekonstruktionsalgorithmen eingesetzt.

Rekonstruktionsalgorithmen

Für die Rekonstruktion wird das Rekonstruktionsgebiet räumlich diskretisiert. Dafür wird ein Verfahren aus [5] verwendet, mit dem ein Kreis in Zellen gleicher Fläche unterteilt werden kann. Er wird dazu in einen inneren Kreis und N Ringe unterteilt, die wiederum in Zellen unterteilt werden. Insgesamt ergeben sich damit $(2N+1)^2$ Zellen, deren Werte der Schallgeschwindigkeit die Elemente des Lösungsvektors $\boldsymbol{x}$ darstellen. Die Diskretisierung ist in Abbildung 3 beispielhaft für $N = 3$ dargestellt.

Mit der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$, die den Messaufbau beschreibt, und dem Messvektor $\boldsymbol{b}$, der die mit der Pfadlänge gewichteten, gemessenen mittleren Schallgeschwindigkeiten entlang aller Messpfade enthält, lautet das zu lösende inverse Problem

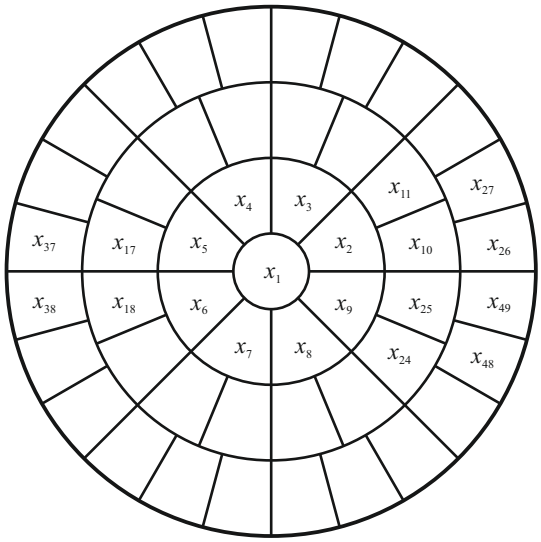

Abbildung 3: Diskretisierung eines runden Rekonstruktionsgebiets in Zellen gleicher Fläche.

$$\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 \,. \tag{3}$$

Die Elemente der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ enthalten die jeweiligen Pfadlängen je Zelle. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ stellt damit die Verknüpfung zwischen den Messwerten und dem diskretisierten Rekonstruktionsgebiet dar.

Die Schwierigkeit bei der Lösung des inversen Problems besteht darin, dass bereits kleine Störungen des Messvektors $\boldsymbol{b}$ zu großen Fehlern der Lösung $\boldsymbol{x}$ führen [6]. Da $\boldsymbol{b}$ rauschbehaftete Messdaten enthält, sind diese Störungen stets vorhanden. Deshalb liefert die direkte Lösung des inversen Problems im Allgemeinen sehr schlechte Ergebnisse. Dem versucht die Tikhonov-Regularisierung entgegenzuwirken. Die Tikhonov-Lösung $\boldsymbol{x}_\lambda$ ist die Lösung von

$$\min_{\boldsymbol{x}} \{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 + \lambda^2 \|\boldsymbol{x}\|_2^2\}. \tag{4}$$

Der erste Term in Gleichung (4) misst die Anpassungsgüte der Lösung. Durch gleichzeitiges Minimieren des Ausdrucks $\|\boldsymbol{x}\|_2^2$ wird versucht, den Einfluss des Rauschens in $\boldsymbol{b}$ auf die Lösung gering zu halten [6]. Der Parameter λ gewichtet beide Ausdrücke zueinander. Das Finden eines geeigneten Werts für λ stellt eine Herausforderung bei der Anwendung der Tikhonov-Regularisierung dar, da es dafür keine allgemeingültige Methode gibt.

Neben der Tikhonov-Regularisierung eignet sich eine weitere Methode besonders für die Rekonstruktion von Temperaturverteilungen, wenn vorausgesetzt werden kann, dass die Verteilung nur einzelne Hotspots aufweist und sonst einen annähernd konstanten Wert hat. Ist das der Fall, so ist der Gradient der Verteilung dünnbesetzt bzw. zumindest komprimierbar und es können aus Compressed Sensing [7] bekannte Methoden angewendet werden.

Ein Vektor heißt dünnbesetzt, wenn nur wenige seiner Elemente ungleich 0 sind [8]. Da diese Bedingung in rea-

len Anwendungen aufgrund von Rauschen im Allgemeinen nicht erfüllbar ist, gibt es die abgeschwächte Form der Komprimierbarkeit. Ein Vektor heißt komprimierbar, wenn sich nur wenige seiner Elemente deutlich von 0 unterscheiden und die meisten nahe 0 sind [8]. Ein komprimierbarer Vektor minimiert die ℓ_1-Norm

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \tag{5}$$

In vielen Fällen liefert die Minimierung der ℓ_1-Norm auch die dünnbesetzteste Lösung [9]. Die ℓ_1-Norm des Gradienten eines Vektors $\boldsymbol{x}$ wird als Totalvariation $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{TV}}$ bezeichnet [10].

Zur Rekonstruktion der Verteilung der Schallgeschwindigkeit, aus der dann die Temperaturverteilung bestimmt werden kann, wird die Totalvariation des Lösungsvektors $\boldsymbol{x}$ minimiert, während gleichzeitig das inverse Problem aus Gleichung (3) erfüllt sein soll. Es ergibt sich also das konvexe Optimierungsproblem [7]

$$\min \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{TV}} \quad \text{u. d. N.} \quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 \leq \epsilon \tag{6}$$

mit der vorzugebenden Fehlerschranke ϵ.

Aus den mit einer der beiden Methoden rekonstruierten Werten der Schallgeschwindigkeit der einzelnen Zellen der Diskretisierung werden anschließend mit dem Zusammenhang aus [2] die Temperaturwerte der Zellen bestimmt. Da das Polynom 5. Ordnung nicht geschlossen nach der Temperatur aufgelöst werden kann, geschieht dies iterativ.

Rekonstruktionsergebnisse

Das Ergebnis der Rekonstruktion einer simulierten Temperaturverteilung mit den beiden im vorherigen Abschnitt beschriebenen Methoden zeigt Abbildung 4. Das obere Teilbild zeigt die angenommene Verteilung mit zwei Hotspots unterschiedlicher Größe und Temperatur, das mittlere das Rekonstruktionsergebnis mit Tikhonov-Regularisierung und das untere mit Minimierung der ℓ_1-Norm des Gradienten von $\boldsymbol{x}$.

Die simulierten mittleren Schallgeschwindigkeiten werden entsprechend Gleichung (2) durch numerische Integration der angenommenen Verteilung entlang der 88 Messpfade bestimmt. Anschließend werden sie für ein realistischeres Ergebnis mit Rauschen in der Größenordnung der zuvor genannten Standardabweichung der Laufzeitmessung mit dem realen Messaufbau von knapp 1 ns überlagert, bevor die Verteilung rekonstruiert wird. Für die Rekonstruktion mit Minimierung der Totalvariation wird, wie in Abbildung 4 erkennbar, eine feinere Diskretisierung gewählt als bei der Tikhonov-Regularisierung, da dadurch ein kleinerer Anteil der Elemente des Gradienten von $\boldsymbol{x}$ deutlich von 0 unterschiedlich ist, was der Rekonstruktion zugutekommt. Die Diskretisierung kann allerdings nicht beliebig fein gewählt werden, da es sonst viele Zellen gibt, die von keinem der Messpfade durchquert werden. Bei der Tikhonov-Regularisierung ist eine zunehmende Unterbestimmtheit des inversen Problems kein Vorteil, weshalb hier eine vergleichsweise gröbere Diskretisierung genutzt wird.

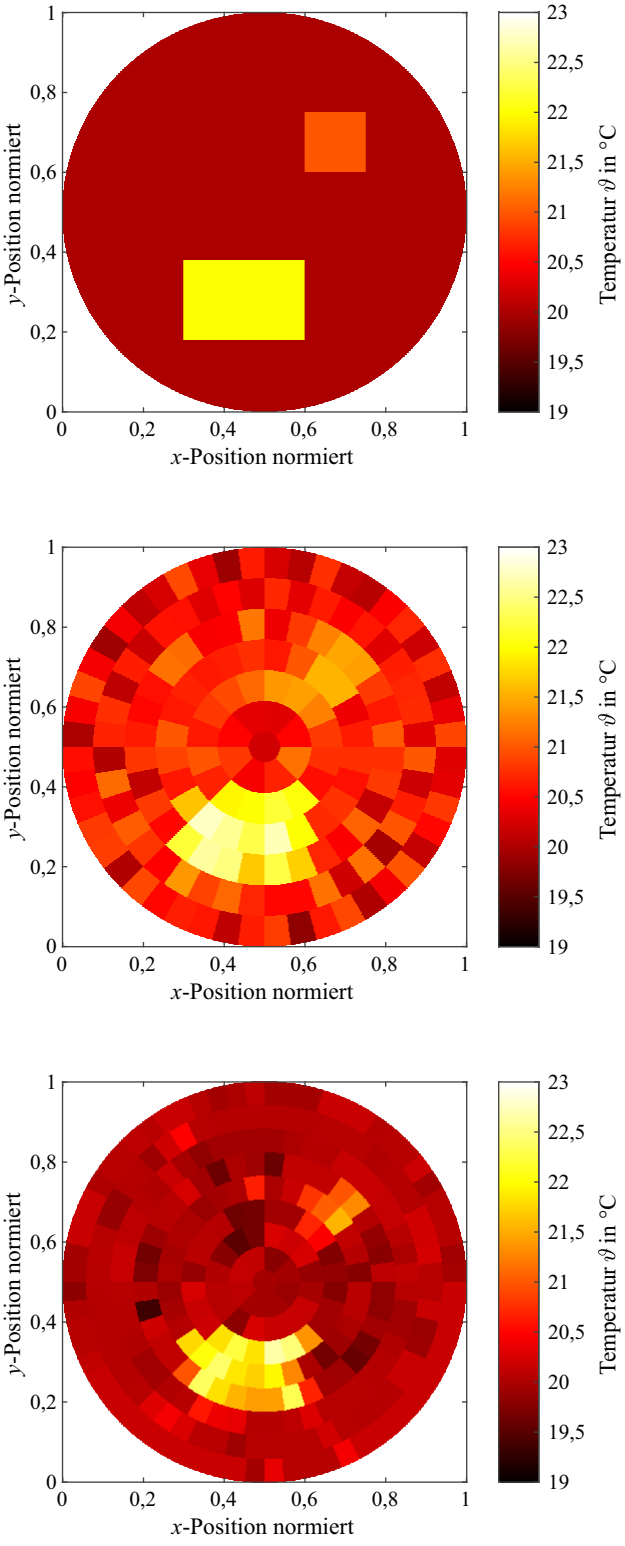

Abbildung 4: Rekonstruktion einer angenommenen Temperaturverteilung mit zwei Hotspots verschiedener Temperatur (oberes Bild) aus simulierten Laufzeiten überlagert mit Rauschen. Für den größeren Hotspot gilt $\vartheta = 22\,^{\circ}\mathrm{C}$, für den kleineren $\vartheta = 21\,^{\circ}\mathrm{C}$ und für die Umgebung $\vartheta = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Das Bild in der Mitte zeigt das Rekonstruktionsergebnis mit Tikhonov-Regularisierung, das untere mit Minimierung der Totalvariation.

In den beiden Rekonstruktionsergebnissen in Abbildung 4 ist zu erkennen, dass die Positionen beider Hotspots gut rekonstruiert werden können. Die Temperaturen stimmen bei der Minimierung der Totalvariation deutlich besser mit der ursprünglichen Verteilung überein. Das Ergebnis der Tikhonov-Regularisierung zeigt außerdem deutlich stärkere Schwankungen der Werte der Zellen außerhalb der Hotspots. Dies kann dazu führen, dass Hotspots wie der kleinere der beiden, mit nur einem geringen Temperaturunterschied, bei der Interpretation des Ergebnisses übersehen werden. Ist aber nur dieser vorhanden, ist er eindeutig rekonstruierbar.

Abbildung 5 zeigt das Ergebnis der Rekonstruktion aus Messdaten. Im oberen Teilbild ist das Ergebnis mit Tikhonov-Regularisierung und im unteren das durch Minimierung der Totalvariation erzielte zu sehen. Für die mit dem Aufbau in Abbildung 2 durchgeführte Messung wurde mit einem Widerstandsdraht aus Konstantan lokal Wärme in das Becken eingebracht, um einen Hotspot zu erzeugen. Bei der Rekonstruktion durch Minimierung der Totalvariation ist der Hotspot klar zu erkennen und seine Position stimmt sehr gut mit der des Widerstandsdrahts überein. Auch mittels Tikhonov-Regularisierung ist der Hotspot grundsätzlich auffindbar, durch Minimierung der Totalvariation wird aber auch in diesem Fall das deutlich bessere Ergebnis erreicht.

Zusammenfassung

Die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit ermöglicht die Rekonstruktion einer Temperaturverteilung basierend auf ausreichend vielen Laufzeitmessungen in einer Ebene. Für diese Rekonstruktion ist sowohl die Tikhonov-Regularisierung als auch die Minimierung der ℓ_1-Norm des Gradienten, also der Totalvariation des Lösungsvektors, geeignet, wobei letztere hier zu besseren Ergebnissen führt. Allerdings muss, damit die Minimierung der Totalvariation angewendet werden kann, angenommen werden können, dass die Temperaturverteilung großteils einen annähernd konstanten Wert hat und nur in kleinen Bereichen davon abweicht. Dies ist beispielsweise bei der Überwachung der Prozesstemperatur in einem Bioreaktor aber häufig gegeben.

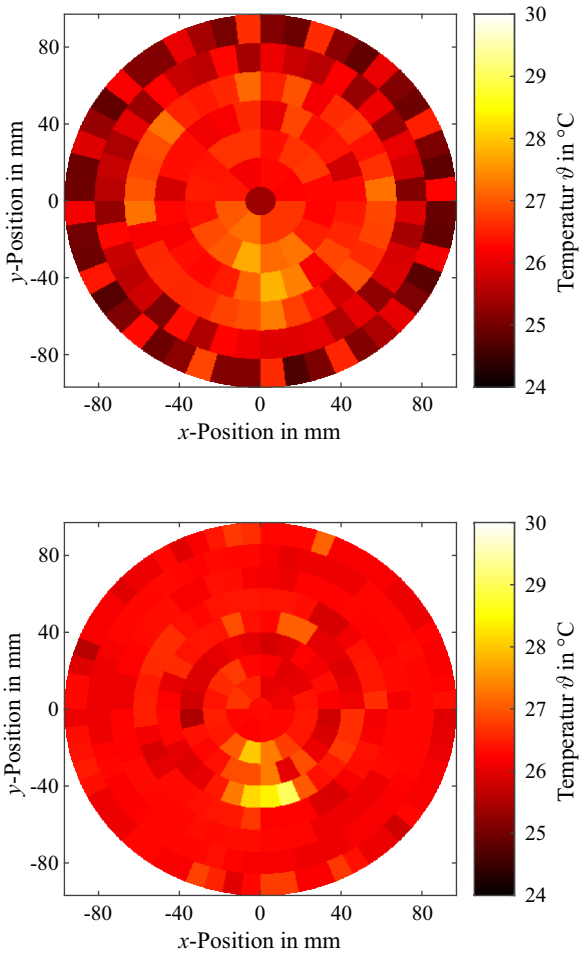

Abbildung 5: Durch Tikhonov-Regularisierung (oben) und Minimierung der Totalvariation (unten) erhaltenes Rekonstruktionsergebnis einer Temperaturverteilung mit einem Hotspot rekonstruiert aus gemessenen Laufzeiten.

Literatur

[1] Lerch, R.; Sessler, G.; Wolf, D.: Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen. Springer-Verlag, 2009

[2] Bilaniuk, N.; Wong, G. S.: Speed of sound in pure water as a function of temperature. The Journal of the Acoustical Society of America, 93(3) (1993), 1609-1612

[3] Schwarz, M.; Reisinger, M.; Eder, D.; Zagar, B. G.: Ultraschallbasierte Messung und tomographische Rekonstruktion von Temperaturverteilungen. Tagungsband DAGA 2020 - 46. Jahrestagung für Akustik (2020), 1121-1124

[4] Bendat, J. S.; Piersol, A. G.: Engineering applications of correlation and spectral analysis. John Wiley & Sons, New York, 1993

[5] Gringorten, I. I.; Yepez, P. J.: The division of a circle or spherical surface into equal-area cells or pixels. Phillips Laboratory, Directorate of Geophysics (1992)

[6] Hansen, P. C.: Discrete inverse problems: insight and algorithms. Siam, Philadelphia, 2010

[7] Donoho, D. L.: Compressed sensing. IEEE Transactions on information theory, 52(4) (2006), 1289-1306

[8] Candès, E. J.; Wakin, M. B.: An introduction to compressive sampling, IEEE signal processing magazine 25(2) (2008), 21-30

[9] Donoho, D. L.: For most large underdetermined systems of linear equations the minimal l1-norm solution is also the sparsest solution. Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 59(6) (2006), 797-829

[10] Rudin, L. I.; Osher, S.; Fatemi, E.: Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Physica D: nonlinear phenomena 60 (1992), 259-268