Adjungierten-basierte Synthese und Bestimmung optimaler Treiberfunktionen von Lautsprechern mit komplexer Richtcharakteristik

Mathias Lemke[1], Lewin Stein[2], Arne Hölter[3], Stefan Weinzierl[3]

[1] *Fachgebiet Numerische Fluiddynamik, TU Berlin, Deutschland, Email: mlemke@tnt.tu-berlin.de*

[2] *Parallele und Verteilte Systeme, Zuse Institut Berlin, Deutschland*

[3] *Fachgebiet Audiokommunikation, TU Berlin, Deutschland*

Einleitung

Die Bestimmung optimaler Treiberfunktionen von Lautsprechern mit frequenzabhängiger Richtcharakteristik ist ein schlecht gestelltes Optimierungsproblem. Zu dessen Lösung haben die Autoren in vorangegangenen Beiträgen eine adjungierten-basierte Methode zur Optimierung von Lautsprecher-Arrays im Zeitbereich vorgestellt [5, 6, 8]. Diese ermöglicht unter anderem die Berücksichtigung von Berandungen und Umgebungseffekten wie Wind, war jedoch bisher auf monopol-artige Quellen beschränkt.

Um diese Einschränkung zu beheben, haben die Autoren einen adjungierten-basierten Zeitbereichsansatz mit Finiten-Differenzen (FDTD) zur Synthese komplexer synthetischer Schallquellen durch diskrete, gitter-basierte Monopole vorgestellt [4, 9].

In diesem Beitrag demonstrieren die Autoren die entsprechende Modellierung eines realen Zweiwege-Monitors (A). Zudem wird gezeigt, wie sich die Vielzahl der zur Synthese verwendeten Monopole in eine Lautsprecher-Treiberfunktion überführen lassen (B).

Beschreibende Gleichungen

Ausgangspunkt für das adjungierten-basierte Verfahren sind die nicht-linearen Eulergleichungen.

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u_j \\ \frac{p}{\gamma-1} \end{pmatrix} + \partial_{x_i} \begin{pmatrix} \varrho u_i \\ \varrho u_i u_j + p\delta_{ij} \\ \frac{u_i p\gamma}{\gamma-1} \end{pmatrix} - u_i \partial_{x_i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) \cdot \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Darin beschreiben ϱ die Dichte, u_i die Geschwindigkeit in x_i-Richtung, p den Druck und γ den Isentropenexponent. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention.

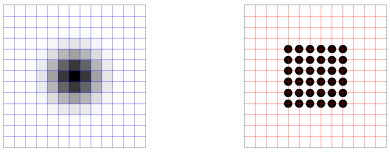
In den Vorarbeiten [5, 6, 8] wurde die Energiegleichung (Druck) um einen Quellterm der Form $\hat{s}(t) \cdot \chi(x)$ ergänzt. Darin beschreibt $\chi(x)$ eine konstante räumliche Verteilung, typischerweise Gauß-artig, und $\hat{s}(t)$ eine zeitlich abhängige Anregungsfunktion, die mit Hilfe einer adjungierten-basierten Optimierung angepasst wurde, um ein gewünschtes Schallfeld zu erzeugen. Die vollrotationssymmetrische Wahl von $\chi(x)$ führt dabei zu einer monopolartigen Abstrahlcharakteristik.

(A) Monopolsynthese

Um auch komplexe Richtcharakteristiken abbilden zu können, wird der Quellterm auf der rechten Seite der Energiegleichung (Druck) wie folgt umformuliert:

$$\partial_t \left(\tfrac{p}{\gamma-1}\right) + \partial_{x_i} \left(\tfrac{u_i p\gamma}{\gamma-1}\right) - u_i \partial_{x_i} \left(p\right) = \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{t}).$$

Das Produkt $\hat{s}(t) \cdot \chi(x)$ wird durch eine raum- und zeitabhängige Anregungsfunktion $s(x,t)$ ersetzt. Anschaulich ergibt sich eine Erhöhung der zur Synthese der Schallquelle verwendeten Freiheitsgrade. Anstatt eines Monopols (links) wird eine Vielzahl von Monopolen auf gewählten Gitterknoten des Rechenraumes (rechts) verwendet.



Die Optimierung der Verteilung $s(x,t)$ erfolgt wieder durch den Adjungierten-Ansatz [3]. Der Rechenaufwand steigt im Vergleich dadurch nicht [9].

Der Ansatz wird auf zwei akustische Konfigurationen angewandt: (A1) ein synthetisches Kreiskolbenmodell [4] und (A2) ein aktiver 2-Wege-Studiomonitor [9].

(A1) Kreiskolben

Das für die Monopolesynthese verwendete Referenzschallfeld wird mithilfe eines CDPS-Ansatzes unter Verwendung der folgenden Übertragungsfunktion G_{3D} und Richtcharakteristik D mit β als Winkel zur Hauptstrahlungsachse (x_1) und r_{mem} als Radius der Lautsprechermembran

$$G_{3D} = \frac{e^{-\mathrm{i}\,k\,r}}{4\pi\,r} \quad D = 2\frac{J_1(k\,r_{\text{mem}}\,\sin\beta)}{k\,r_{\text{mem}}\,\sin\beta}$$

für die diskreten Frequenzen 1, 2 und 3 kHz bestimmt. Abhängig von der Frequenz zeigt sich ein komplexes Abstrahlverhalten, siehe zum Beispiel Abb. 1 (oben).

Zur Nachbildung der Schallquelle wird eine Verteilung $s(x,t)$ im Zentrum des Rechengebiets verwendet, siehe Abb. 1 (unten). Die Polardiagramme in Abb. 2 zeigen die maximale Amplitude in Abhängigkeit vom Winkel β bei einem radialen Abstand von $r = 0.5$ m zur Quellmitte. Es wird eine sehr gute Übereinstimmung mit der

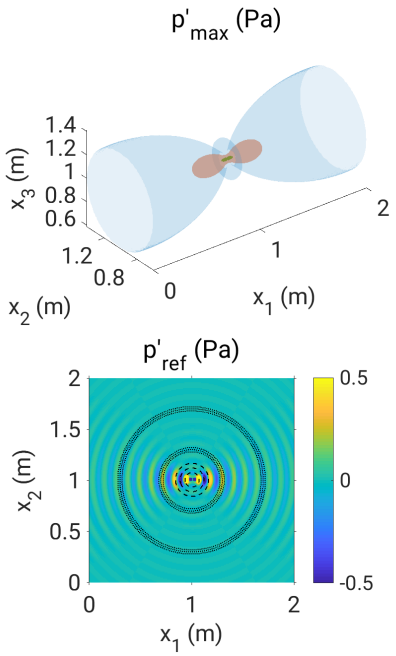


Abbildung 1: (A1) (Oben) Isoflächen für das Kreiskolbenmodell (3 kHz), mit Werten von 0.05, 0.25 und 1.5 Pa des maximalen Schalldrucks bezogen auf die gesamte Rechenzeit. (Unten) Momentaufnahme des Referenzschallfeldes. Das Gebiet in dem die Verteilung $s(x,t)$ angepasst wird ist durch – – – markiert, das Gebiet in dem das Referenzschallfeld ausgewertet wird durch $\cdots$.

Referenzlösung gefunden. An den Einschnürungen finden sich geringfügige Abweichungen.

Die adjungierte, gitter-basierte Monopolsynthese ist in der Lage, das Kolbenstrahlermodell abzubilden.

(A2) 2-Wege-Studiomonitor

Das Referenzschallfeld für den im Folgenden untersuchten Genelec 8020c basiert auf öffentlich verfügbaren experimentellen Messungen und einer Nachbildung des Schallfeldes, basierend auf sphärisch-harmonischen Ansatzfunktionen, siehe [7, Gln. 3.34] und [1, 2].

Erneut wird zur Nachbildung der Quelle eine Verteilung $s(x,t)$ in der Mitte des Rechengebiets verwendet. Ausführliche Details zum Setup und Ergebnisse sind in [9] beschrieben.

Abbildung 3 zeigt den Vergleich zwischen dem Referenzschallfeld und dem Ergebnis der gitter-basierten Monopolverteilung. Erneut wird eine sehr gute Übereinstimmung gefunden.

Die adjungierte, gitter-basierte Monopolsynthese ist in der Lage, einen realen 2-Wege-Studiomonitor abzubilden.

(B) Synthese als Nebenbedingung

Wie in Abschnitt (A) gezeigt, lassen sich durch die adjungierten-basierte Monopolsynthese komplexe Schallquellen modellieren. Aus den Ergebnissen können jedoch nicht direkt Treiberfunktionen zur Optimierung realer Beschallungsanlagen abgeleitet werden.

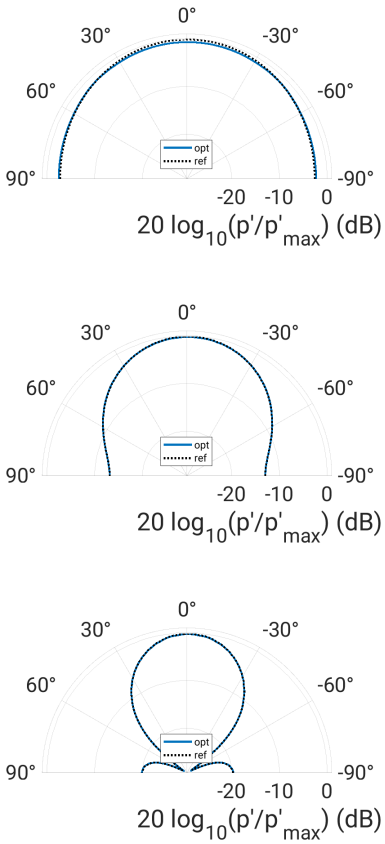


Abbildung 2: (A1) Richtwirkung des Kreiskolbenmodells (ref) und der gitter-basierten Monopolverteilung (opt) für gleiche Frequenzen (1, 2 und 3 kHz von oben nach unten).

Um dies zu ermöglichen, wird die Energiegleichung (Druck) erneut modifiziert. Der raum-zeit-abhängige Term $s(x,t)$ wird ersetzt:

$$\partial_t \left(\tfrac{p}{\gamma-1}\right) + \partial_{x_i} \left(\tfrac{u_i p \gamma}{\gamma-1}\right) - u_i \partial_{x_i} \left(p\right) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a_k(t)}\ \mathbf{S_k(x)}.$$

Darin beschreiben $S_k(x)$ konstante räumliche Verteilungen und $a_k(t)$ zeitlich abhängige Anregungsfunktionen für diskrete Frequenzen k. Die Überlagerung der einzelnen Komponenten k durch Summation führt zu einer resultierenden Gesamtanregung/Quellmodellierung.

Die Optimierung der Terme $\sum_k a_k(t)\ S_k(x)$ geschieht dabei in einem zwei-stufigen Prozess:

1. Bestimmung der Direktivitätskomponenten $S_k(x)$
2. Bestimmung der zeitlichen Anregungen $a_k(t)$

Der Prozess soll hier an einem 2D-Beispiel demonstriert werden. Abbildung 4 zeigt das Rechengebiet und das Optimierungs-/Synthese-Setup. Betrachtet wird wieder ein Kolbenstrahlermodell mit frequenzabhängiger Richtcharakteristik. Das Referenzschallfeld wird mittels CDPS-Ansatz berechnet.

(B1) Bestimmung der Direktivitätskomponenten

Zunächst werden die Direktivitätskomponenten $S_k(x)$ bestimmt. Dazu wird das Referenzschallfeld bei einer ge-

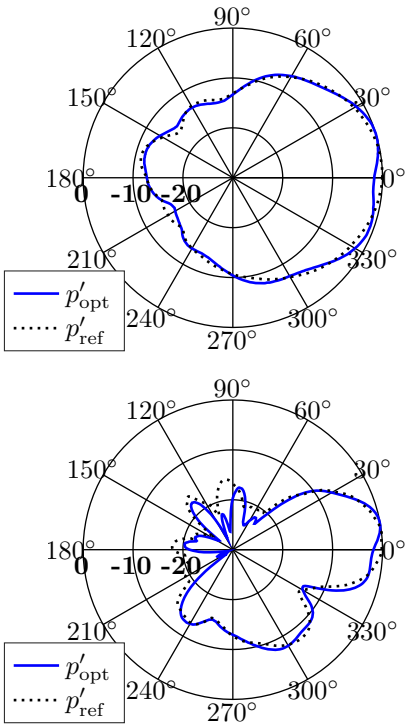


Abbildung 3: (A2) Richtwirkung des untersuchten 2-Wege-Studiomonitors (ref) und der synthetisierten Monopolverteilung (opt) bei 2 kHz (oben) beziehungsweise 3 kHz (unten).

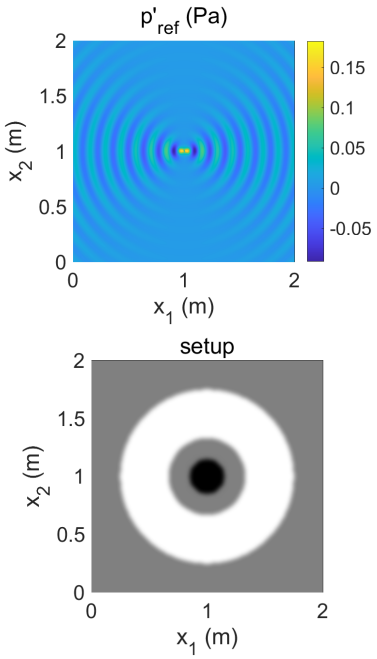


Abbildung 4: (B) (Oben) Momentaufnahme des Referenzschallfeldes für 2.5 kHz. (Unten) Optimierungs-/Synthese-Setup. Im inneren Bereich (schwarz) werden die Direktivitätskomponenten S_k bestimmt. Im umgebenen Gebiet (weiß) wird das Referenzschallfeld ausgewertet.

gebenen Frequenz berechnet (oder im praktischen Anwendungsfall experimentell bestimmt). Im Folgenden ist dies für die Frequenzen von 2 kHz bis 3 kHz in 100 Hz Schritten geschehen.

Anschließend werden die entsprechenden räumlichen Direktivitätskomponenten mittels adjungierter Optimierung bestimmt, wobei die zeitlichen Anregungsfunktionen entsprechend dem Referenzschallfeld zunächst vorgegeben sind. Abbildung 5 zeigt beispielhaft einige resultierende Direktivitätskomponenten. Der Übergang zwischen den Komponenten ist relativ glatt. Es ist zu erwarten, dass zwischen einzelnen Frequenzen interpoliert werden kann.

(B2) Bestimmung der zeitlichen Anregungsfunktionen

Nachdem für alle Frequenzen von Interesse die Direktivitätskomponenten einer Quelle (Lautsprechertyp) einmalig bestimmt wurden, können sie verwendet werden, um die zeitlichen Anregungsfunktionen zu bestimmen oder zu optimieren. Die Optimierung geschieht wieder mittels des adjungierten Ansatzes, entsprechend [5, 8].

Abbildung 6 (oben) zeigt das resultierende Schallfeld bei Verwendung einer Direktivitätskomponente $S_k \rightarrow S_{(f=2.5\text{ kHz})}$ im Vergleich zum Referenzschallfeld für den Fall einer harmonischen Anregung von 2.5 kHz. Das Referenzschallfeld konnte durch Verwendung der entsprechenden Direktivitätskomponente und Optimierung der zeitlichen Anregung sehr gut rekonstruiert werden. Für alle weiteren untersuchten Frequenzen finden sich vergleichbare Ergebnisse.

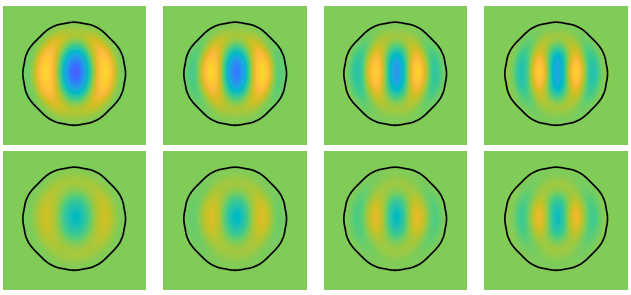


Abbildung 5: (B1) Resultierende Direktivitätskomponenten S_k für die Frequenzen 2, 2.3, 2.7 und 3 kHz (von links nach rechts) aufgeteilt in Real-(oben) und Imaginärteil (unten).

In der Praxis ist jedoch die Überlagerung von mehreren Frequenzen von Interesse. Abbildung 7 zeigt beispielhaft das Referenzschallfeld und die Ergebnisse der Optimierung für eine Überlagerung von zwei Anregungsfrequenzen, 2 und 3 kHz. Zur Optimierung standen dem adjungierten Verfahren alle elf zuvor bestimmten Direktivitätskomponeten zur Verfügung. Angepasst wurden die dazugehörigen elf zeitlichen Anregungsfunktionen $a_k(t)$, spektral gefiltert entsprechend ihrer zugeordneten Frequenz. Auch hier findet sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der Referenz und dem resultierenden Schallfeld unter Verwendung der Direktivitätskomponenten.

Damit stehen für alle betrachteten Frequenzen zugehörige zeitliche Anregungsfunktionen zur Auswertung zur Verfügung. Insbesondere Amplitude und Phase können zur Bestimmung optimaler Treiberfunktionen herangezogen werden.

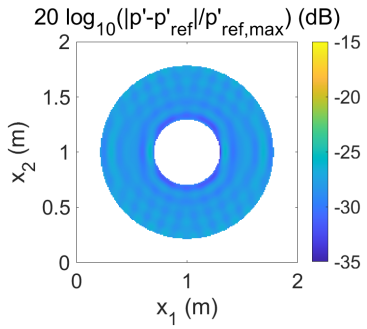


Abbildung 6: (B2) Abweichung zwischen dem resultierenden und dem Referenzschallfeld im Fall einer harmonischen Anregung bei 2.5 kHz und Verwendung einer Direktivitätskomponente und zeitlichen Anregungsfunktion.

Zusammenfassung

Vorgestellt wurde die Verwendung und Erweiterung einer adjungierten-basierten Zeitbereichsmethode. Zum einen wurde die Monopolsynthese von Schallquellen mit komplexer Richtcharakteristik gezeigt. Zum anderen wurde ein Dekompositionsansatz eingeführt, der es erlaubt, die Syntheseergebnisse als Nebenbedingung für die Optimierung von Lautsprecher-Arrays zu nutzen. Das Vorgehen wurde am Beispiel eines synthetischen Kreiskolbenmodells validiert.

Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung im Rahmen der Projekte LE 3888/2 und WE 4057/16.

Literatur

[1] L. Aspöck, F. Brinkmann, D. Ackermann, S. Weinzierl, und M. Vorländer. BRAS - Benchmark for Room Acoustical Simulation, 2020. http://dx.doi.org/10.14279/depositonce-6726.3.

[2] F. Brinkmann, L. Aspöck, D. Ackermann, R. Opdam, M. Vorländer, und S. Weinzierl. A benchmark for room acoustical simulation. concept and database. *Applied Acoustics*, 176:107867, 2021.

[3] M. Lemke. *Adjoint based data assimilation in compressible flows with application to pressure determination from PIV data.* PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2015.

[4] M. Lemke, L. Stein, A. Hölter, F. Straube, und S. Weinzierl. Synthese komplexer Richtcharakteristiken für eine Schallfeldoptimierung im Zeitbereich. In *Fortschritte der Akustik - DAGA 2020*, pages 1192–1195, 2020.

[5] M. Lemke, F. Straube, F. Schultz, J. Sesterhenn, und S. Weinzierl. Adjoint-based time domain sound reinforcement. In *Audio Engineering Society Conference: 2017 AES International Conference on Sound Reinforcement – Open Air Venues*, Aug 2017.

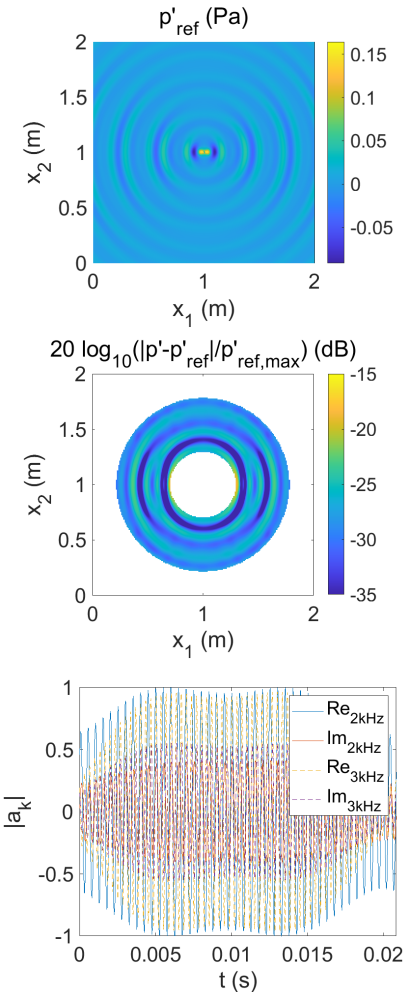


Abbildung 7: (B2) (Oben) Momentaufnahme des Referenzschallfeldes im Fall einer überlagerten Anregung mit 2 und 3 kHz. (Mitte) Abweichung zwischen dem resultierenden und dem Referenzschallfeld unter Verwendung von elf Direktivitätskomponenten und zeitlichen Anregungsfunktionen. (Unten) Resultierende zeitliche Anregungsfunktionen für die Frequenzen von Interesse.

[6] M. Lemke, F. Straube, J. Sesterhenn, und S. Weinzierl. Adjungierten-basierte Schallfeldsynthese und Beschallung. In *Fortschritte der Akustik - DAGA 2017*, pages 1422–1425, 2017.

[7] B. Rafaely. *Fundamentals of Spherical Array Processing*, volume 8 of *Springer Topics in Signal Processing*. Springer, Berlin Heidelberg, first edition, 2015.

[8] L. Stein, F. Straube, J. Sesterhenn, S. Weinzierl, und M. Lemke. Adjoint-based optimization of sound reinforcement including non-uniform flow. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 146(3):1774–1785, 2019.

[9] L. Stein, F. Straube, S. Weinzierl, und M. Lemke. Directional sound source modeling using the adjoint euler equations in a finite-difference time-domain approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 148(5):3075–3085, 2020.