Vergleich von Formulierungen der Energie-Boundary-Elemente-Methode und der zugrundeliegenden Annahmen

Matthias Ram und Otto von Estorff

Technische Universität Hamburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: mub@tuhh.de

Einleitung

Hohe Frequenzen beziehungsweise in Relation zur Geometrie kleine Wellenlängen stellen in der numerischen Akustik häufig eine besondere Herausforderung dar. Die klassischen Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) und Boundary-Elemente-Methode (BEM) sind aufgrund der erforderlichen feinen Vernetzung und damit sehr großen Gleichungssysteme nicht mehr effizient oder gar nicht lösbar. Um diesem Problem zu begegnen, wurden in der Vergangenheit verschiedene Verfahren vorgeschlagen, die auf zeitgemittelten, energetischen Größen statt des oszillierenden Schalldrucks als primärer Zustandsgröße basieren. Ihre glatteren Verläufe erlauben eine weitgehend frequenzunabhängige und wesentlich gröbere Diskretisierung, so dass sich im Allgemeinen kleine, schnell lösbare Gleichungssysteme ergeben.

Ein Vertreter dieser Verfahren ist die Energie-Boundary-Elemente-Methode (EBEM) bei der nur der Rand des Berechnungsgebiets diskretisiert wird. Zur Herleitung der zugrundeliegenden Differentialgleichung sind vereinfachende Annahmen hinsichtlich der Wellenausbreitung erforderlich. Hierzu zählen beispielsweise die Vernachlässigung von Interferenzen, räumliche Mittelung, Fernfeldapproximationen sowie angenommene elementare Wellenformen. Resultierend aus den jeweils getroffenen Annahmen wurden von verschiedenen Autoren unterschiedliche Formulierungen der Methode hergeleitet, von denen eine Auswahl im Folgenden vorgestellt wird.

Grundlagen der Energiemethoden

Es wird zunächst die Leistungsbilanz für ein beliebiges Kontrollvolumen Ω, das wie in Abbildung 1 dargestellt durch den Rand Γ begrenzt wird, zu

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \pi_\mathrm{in}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \pi_\mathrm{dis}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma q_\mathrm{n}\,\mathrm{d}\Gamma \qquad (1)$$

aufgestellt. Dabei bezeichnet π_in die von außen zugeführte Leistungsdichte, π_dis die im Volumen dissipierte Leistungsdichte und $q_\mathrm{n} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$ den Leistungsfluss beziehungsweise die Intensität in die äußere Normalenrichtung auf dem Rand Γ des Kontrollvolumens. Mittels des Gaußschen Integralsatzes kann das Oberflächenintegral im letzten Term in ein Volumenintegral überführt werden. In differentieller Formulierung und unter Annahme eines stationären Zustands mit $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ folgt dann

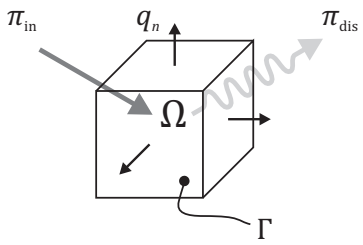

Abbildung 1: Das Kontrollvolumen Ω zur Aufstellung der Leistungsbilanz.

$$\nabla\cdot\mathbf{q} + \pi_\mathrm{dis} = \pi_\mathrm{in}. \qquad (2)$$

Analog zur statistischen Energie Analyse (SEA) [5, 2] wird die dissipierte Leistungsdichte proportional zur Energiedichte zu

$$\langle\pi_\mathrm{dis}\rangle = \eta\omega\,\langle w\rangle \qquad (3)$$

angenommen. Hierbei bezeichnet η den Verlustfaktor und ω die Kreisfrequenz. Das verwendete Dämpfungsmodell gilt unter der Annahme, dass die kinetische und potentielle Energiedichte im Feld gleich sind. Dies ist im Allgemeinen nicht gegeben, trifft aber unter anderem auf fortschreitende ebene Wellen zu. Der Operator $\langle ...\rangle$ kennzeichnet in Gleichung 3 die zeitliche Mittelung über eine Periode. Die zeitliche Mittelung ist eine weitere notwendige Annahme zur Herleitung der Energieflussgleichung. Wird sie auf die Bilanzgleichung 2 angewendet, ergibt sich mit Gleichung 3

$$\nabla\cdot\langle\mathbf{q}\rangle + \eta\omega\,\langle w\rangle = \langle\pi_\mathrm{in}\rangle\,. \qquad (4)$$

Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung 4 müssen die beiden unbekannten Größen $\langle\mathbf{q}\rangle$ und $\langle w\rangle$ in Relation gesetzt werden. Hierzu sind weitere Annahmen erforderlich, die letztlich auf die verschiedenen im nächsten Abschnitt vorgestellten Formulierungen führen.

Es sei angemerkt, dass im Rahmen dieses Beitrags nur eine Auswahl betrachtet werden kann und in der Literatur weitere Variationen zu finden sind. So führt beispielsweise die Vernachlässigung von Fluiddämpfung auf den *Intensity Potential Approach* [8] beziehungsweise eine vergleichbare Formulierung ausgehend vom Kirchhoff-Helmholtz-Integral [9].

Betrachtete Formulierungen

Im Folgenden werden drei Formulierungen (1-3) betrachtet und die jeweils zugrundeliegenden Annahmen im Einzelnen vorgestellt. Zur numerischen Lösung sind im Weiteren noch eine Diskretisierung der sich ergebenden Randintegralgleichungen sowie die Definition von Randbedingungen erforderlich. Diese Schritte werden jedoch nicht detailliert betrachtet, da sie allen Formulierungen gemein sind.

Annahme ebener Wellen (1)

Die resultierende Differentialgleichung dieser ersten Formulierung ist identisch mit der Energieflussgleichung der EFEM für akustische Kavitäten [1]. Zur Lösung der Gleichung wird jedoch abweichend als numerische Methode eine BEM eingesetzt. Eine entsprechende Implementierung ist in [7] beschrieben.
Der Formulierung liegt die Annahme zugrunde, dass das akustische Feld als Überlagerung ebener Wellen aufgefasst werden kann. Unter der zusätzlichen Annahme einer räumlichen, aber lokal begrenzten Mittelung lässt sich die Relation

$$\langle \bar{\mathbf{q}} \rangle = -\frac{c_0^2}{\eta\omega} \nabla \langle \bar{w} \rangle \tag{5}$$

aufstellen [1]. Hierbei bezeichnet c_0 Schallgeschwindigkeit und die Überstreichung $(\bar{\cdot\cdot})$ kennzeichnet die zusätzliche räumliche Mittelung. Es gelten zudem die folgenden Annahmen [6]:

- Es liegt geringe Dämpfung vor ($\eta \ll 1$).
- Die Fernfeld-Approximation ist gültig ($kr \gg 1$ mit $k = \frac{\omega}{c_0}$).
- Es gilt bei räumlicher Mittelung ein lineares Superpositionsprinzip für Energiedichten. Dies entspricht einer Vernachlässigung von Interferenzen.

Wird nun Gleichung 5 in Gleichung 4 eingesetzt, ergibt sich mit

$$-\frac{c_0^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{w} \rangle + \eta\omega \langle \bar{w} \rangle = \langle \pi_{\mathrm{in}} \rangle \tag{6}$$

die Energieflussgleichung der EFEM. Sie entspricht der Helmholtzgleichung mit rein imaginärer Wellenzahl $k' = \mathrm{i}\frac{\eta\omega}{c_0}$ und kann analog dazu mit der BEM gelöst werden. Für das homogene Problem wird die Randintegralgleichung

$$c(\mathbf{x}_0) \langle \bar{w} \rangle (\mathbf{x}_0) + \int_\Gamma \frac{\partial G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} \langle \bar{w} \rangle (\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\Gamma = -\frac{\eta\omega}{c_0^2} \int_\Gamma \langle \bar{q_\mathrm{n}} \rangle G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) \, \mathrm{d}\Gamma \tag{7}$$

aufgestellt. Die zugehörige Greensche Funktion und ihre Normalenableitung lauten

$$G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r} \tag{8}$$

und

$$\frac{\partial G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} = -(1+\eta kr) \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r}. \tag{9}$$

Bei Betrachtung der Gleichung 8 wird ein in der Literatur viel diskutierter Widerspruch deutlich: Während nach der analytischen Lösung der Helmholtzgleichung die Energiedichte einer Punktquelle reziprok proportional zum Quadrat der Entfernung ($\langle w \rangle \propto \frac{1}{r^2}$) abfällt, zeigt Gleichung 8 einen einfachen antiproportionalen Abfall.
Die Formulierung kann somit das direkte Schallfeld von Quellen nicht korrekt wiedergeben, bildet aber das Diffusfeld in Innenräumen gut ab. Dieser Umstand hat zur Entwicklung der nachfolgenden Formulierung geführt.

Annahme sphärischer Wellen (2)

Anstatt ebener Wellen wird zunächst das Wellenfeld eines einzelnen Monopolstrahlers betrachtet. Wird die Dissipation im Fluid vorerst vernachlässigt und die Fernfeldannahme getroffen, gilt in diesem Fall

$$\langle \mathbf{q} \rangle = c_0 \langle w \rangle \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{10}$$

Wird Gleichung 10 in Gleichung 4 eingesetzt ergibt sich die modifizierte Energieflussgleichung zu

$$\frac{\partial \langle w \rangle}{\partial r} + \left(\frac{2}{r} + \eta k\right) \langle w \rangle = \delta(r). \tag{11}$$

Ihre Fundamentallösung lautet

$$G_2(\mathbf{x},\mathbf{x_0}) = \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi c_0 r^2} \tag{12}$$

und zeigt im Unterschied zur Formulierung (1) denselben Abfall der Energiedichte wie die analytische Lösung.

Die Gleichung 11 ist nun jedoch von der radialen Koordinate r und somit der Position der Quelle abhängig. Auf Basis dieser Gleichung kann daher keine direkte Formulierung für beliebige Berechnungsgebiete erfolgen. Werden jedoch inkohärente Quellen angenommen, gilt für die Energiedichten wiederum das lineare Superpositionsprinzip und die indirekte Formulierung einer Randintegralgleichung in der Form

$$\langle w \rangle (\mathbf{x}_0) = \int_\Gamma G_2(\mathbf{x},\mathbf{x_0}) \, \sigma(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{13}$$

wird möglich [4].

Annahme sphärischer Wellen mit Berücksichtigung zusätzlicher Nahfeldterme (3)

Die dritte hier vorgestellte Formulierung ähnelt der vorherigen, jedoch wird die zuvor getroffene Fernfeldannahme fallen gelassen. In diesem Fall gilt [3]

$$\langle \mathbf{q} \rangle = c_0 \frac{2k^2r^2}{2k^2r^2+1} \langle w \rangle \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{14}$$

und die beherrschende Differentialgleichung folgt zu

$$\frac{\partial \langle w \rangle}{\partial r} + \left(\frac{2}{r} + \eta k + \frac{4k^2 r}{(2k^2r^2+1)^2}\right) \langle w \rangle = \delta(r). \tag{15}$$

Die Fundamentallösung von Gleichung 15 wird in [3] zu

$$G_3(\mathbf{x},\mathbf{x_0}) = \frac{C}{r^2} e^{-\eta kr + 1/\left(1+2k^2r^2\right)} \tag{16}$$

bestimmt, wobei C eine unbekannte Integrationskonstante bezeichnet. Sie wird bestimmt, indem die Beziehungen zwischen Energiedichte, Intensität und Eingangsleistung betrachtet werden. Insbesondere ist die akustische Leistung gleich dem Oberflächenintegral über die Intensität. In [3] wird bei der Berechnung der Integrationskonstanten die Intensität selbst jedoch über Gleichung 10 mit der Energiedichte in Relation gesetzt

und der Grenzwert des Oberflächenintegrals mit einer Kugelfläche, deren Radius gegen null geht, berechnet.
Die Verwendung von Gleichung 10 scheint an dieser Stelle jedoch widersprüchlich, da in der Herleitung der zu lösenden Differentialgleichung Gleichung 14 angesetzt wurde.

Die Integrationskonstante C sowie die Greensche Funktion für die Intensität $\mathbf{H}_3$ wurden daher abweichend von [3] wie folgt bestimmt: Mit der Fundamentallösung für die Energiedichte aus Gleichung 16 und Gleichung 14 lautet die Fundamentallösung für die Intensität

$$\mathbf{H}_3\left(\mathbf{x},\mathbf{x_0}\right) = C\frac{2k^2c_0}{2k^2r^2+1}e^{-\eta kr+1/\left(1+2k^2r^2\right)}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{17}$$

Wird nun eine geschlossen Kugeloberfläche S betrachtet, die die Quelle einschließt, ergibt sich für die akustische Leistung

$$P = \int_S \mathbf{H}_3\left(\mathbf{x},\mathbf{x_0}\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = C\cdot 4\pi r^2\frac{k^2c_0}{2k^2r^2+1}e^{-\eta kr+1/\left(1+2k^2r^2\right)}. \tag{18}$$

Sie ist von der Entfernung zur Quelle r abhängig. Eine physikalisch bedeutungsvolle Interpretation wird möglich, wenn der ungedämpfte Fall ($\eta = 0$) im Grenzfall $r \to \infty$ betrachtet wird. Es folgt

$$\lim_{r\to\infty} P = C4\pi c_0. \tag{19}$$

Soll die Amplitude der Eingangsleistung also auf eins normiert werden, muss

$$C = \frac{1}{4\pi c_0} \tag{20}$$

gelten. Diese Lösung entspricht der in Gleichung 12 implizierten Integrationskonstanten.
Mit den hiermit definierten Greenschen Funktionen kann analog zur Formulierung (2) eine indirekte EBEM genutzt werden.

Vergleich anhand eines numerischen Testfalls

Die drei vorgestellten Formulierungen werden anhand eines einfachen numerischen Testfalls verglichen.

Hierzu wird der in Abbildung 2 dargestellte kugelförmige Innenraum mit dem Radius $R = 1\,\mathrm{m}$ betrachtet. Der Kugelmittelpunkt fällt dabei mit dem Ursprung des verwendeten Koordinatensystems zusammen. Bei $\mathbf{x}_\mathrm{S} = \begin{bmatrix}-0{,}5 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ wird eine Punktquelle platziert, deren Quellstärke auf eine Schallleistung von $P = 1\,\mathrm{W}$ in $1\,\mathrm{m}$ Entfernung normiert wird. Als Ausbreitungsmedium wird Luft mit $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$ und $c_0 = 340\,\mathrm{m/s}$ angenommen. Für die Wände wird eine schwach absorbierende Randbedingung mit dem Absorptionsgrad $\alpha = 0{,}05$ vorgeschrieben. Die betrachtete Frequenz ist $f = 500\,\mathrm{Hz}$.

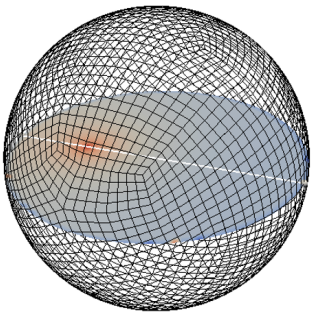

Abbildung 2: Kugelförmiger Innenraum mir Radius R=1 m. Koordinatenursprung im Kugelmittelpunkt, Punktquelle bei $\begin{bmatrix}-0{,}5 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$. Auswertung entlang der x-Achse (weiß).

Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt entlang der x-Achse, welche in Abbildung 2 durch eine weiße Linie gekennzeichnet ist.

Es wird zunächst mit $\eta = 10^{-4}$ eine geringe Fluiddämpfung angenommen. Abbildung 3 zeigt für diesen Fall die in Schalldruckpegel umgerechneten Energiedichten der drei Formulierungen. Es fällt unmittelbar auf, dass die Formulierung (1) einen nahezu konstanten Pegel liefert, während die Formulierung (2) und (3) das Direktschallfeld der Punktquelle vergleichbar gut abbilden. Dieses Verhalten war aufgrund des bereits diskutierten Verhaltens der Fundamentallösung erwartet.
Ein bislang weniger beachteter Umstand wird bei Betrachtung der in Abbildung 4 dargestellten Schallintensitätspegel deutlich. Da die Intensität sich in der Formulierung (1) proportional zum Gradienten der Energiedichte verhält, zeigt sich ein anderer Verlauf der Pegel und die Formulierung (1) bildet das Direktschallfeld in unmittelbarer Nähe zur Quelle korrekt ab. Zu den Rändern des Berechnungsgebiets ergeben sich jedoch auch hier starke Abweichungen zu den Formulierungen (2) und (3), welche in unmittelbarer Nähe zur Quelle voneinander abweichen, ansonsten aber einen nahezu identischen Verlauf zeigen.

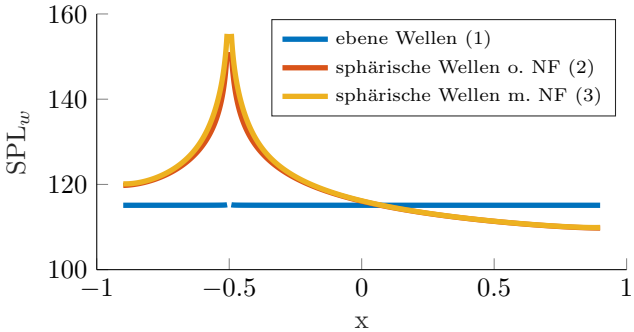

Abbildung 3: Schalldruckpegel auf Basis der Energiedichte entlang der x-Achse für geringe Dämpfung ($\eta = 10^{-4}$).

In einem zweiten Testfall wird für das ansonsten unveränderte Modell eine hohe Fluiddämpfung mit $\eta = 10^{-1}$ angenommen. Abbildung 5 zeigt für diesen Fall wiederum die errechneten Schalldruckpegel. Die Formulierung (1) kann den Einfluss der Punktquelle in die-

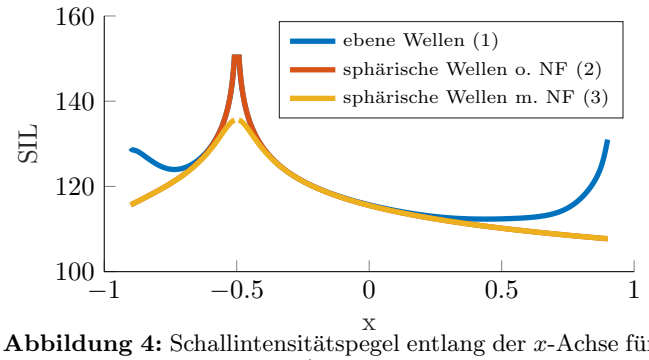

Abbildung 4: Schallintensitätspegel entlang der x-Achse für geringe Dämpfung ($\eta = 10^{-4}$).

sem Fall zwar qualitativ besser wiedergeben, zeigt aber nach wie vor erwartbar starke Abweichungen zu den Formulierungen (2) und (3), deren Ähnlichkeit unabhängig von der Dämpfung sehr groß bleibt. Die in Abbildung 6 dargestellten Schallintensitätspegel für den Fall höherer Dämpfung zeigen hingegen für alle Formulierungen sehr gute Übereinstimmung, einzig in unmittelbarer Nähe zur Quelle wirkt sich die zusätzliche Berücksichtigung der Nahfeldterme in Formulierung (3) aus.
Dieser bemerkenswerte Umstand spricht dafür, das alle hier beschriebenen Formulierungen in vielen praxisrelevanten Szenarien möglicherweise ähnliche Ergebnisse für die Intensität liefern und die Abweichungen der Formulierungen untereinander gegenüber dem zu erwartenden Fehler aufgrund der gemeinsamen vereinfachenden Annahmen weniger stark ins Gewicht fallen. Obwohl Intensität und Energiedichte grundsätzlich die gleiche Aussagekraft besitzen sollten, sollte bei einer Validierung der Methoden aus diesem Grund auch verstärkt Augenmerk auf die Intensität gelegt werden.

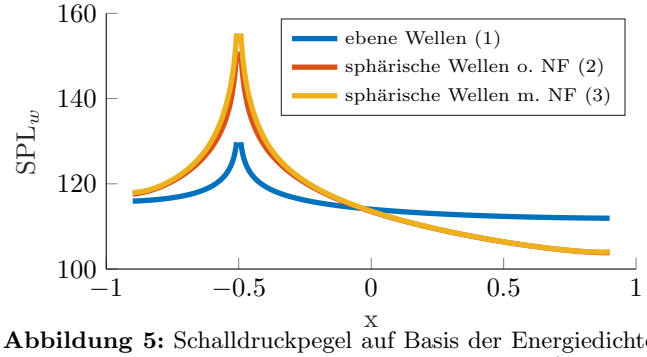

Abbildung 5: Schalldruckpegel auf Basis der Energiedichte entlang der x-Achse für starke Dämpfung ($\eta = 10^{-1}$).

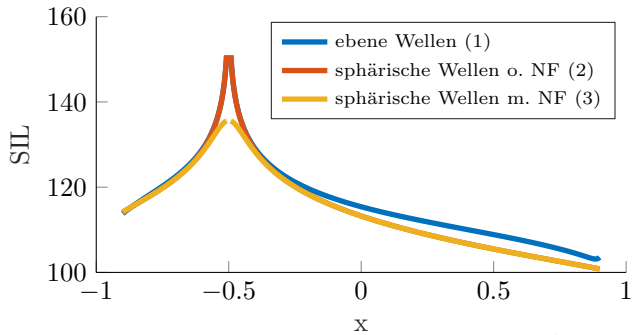

Abbildung 6: Schallintensitätspegel entlang der x-Achse für starke Dämpfung ($\eta = 10^{-1}$).

Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden drei verschiedene Formulierungen der EBEM sowie die jeweils zugrundeliegenden Annahmen vorgestellt. Anhand eines einfachen numerischen Testfalls wurden die mit den jeweiligen Formulierungen gewonnenen Berechnungsergebnisse gegenübergestellt und verglichen. Dabei zeigen sich geringe Abweichungen zwischen den beiden auf sphärischen Elementarwellen beruhenden Implementierungen und es konnte festgestellt werden, dass auch unter Annahme ebener Wellen die Intensität des Direktschallfeldes korrekt abgebildet wird, während die Energiedichte insbesondere bei schwacher Dämpfung nur unzureichend wiedergegeben wird.

Es werden weitere Untersuchungen mit anderen Randbedingungen und komplexeren Geometrien angestrebt. In diesem Zusammenhang sollte auch untersucht werden, wie die Formulierungen sich verhalten, wenn die dominierende Dämpfung des Systems sich vom Fluid in Richtung Wandabsorption an seinen Rändern verschiebt.
Insbesondere ist - auch für komplexere Systeme - ein Abgleich mit genaueren Berechnungsmethoden, wie beispielsweise klassischer FEM und BEM, von Interesse.

Literatur

[1] Bouthier, Oliver Marie: *Energetics of vibrating systems*, 1992.

[2] Cremer, L., M. Heckl und B.A.T. Petersson: *Structure-Borne Sound*. 2005.

[3] Kim, Jong Do, Suk Yoon Hong, Hyun Wung Kwon und Jee Hun Song: *Energy flow model considering near field energy for predictions of acoustic energy in low damping medium*. Journal of Sound and Vibration, 330(2):271–286, 2011.

[4] Le Bot, A.: *A vibroacoustic model for high frequency analysis*. Journal of Sound and Vibration, 211(4):537–554, 1998.

[5] Lyon, Richard H.: *Statistical energy analysis of dynamical systems: theory and applications*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1975.

[6] Moens, I.: *On the use and the validity of the energy finite element method for high frequency vibrations*. Doktorarbeit, K.U. Leuven, 2001.

[7] Raveendra, S. T. und W. Zhang: *Vibro-acoustic analysis using a hybrid energy finite element/boundary element method*, 2007.

[8] Thivant, Michael, Patrik B.U. Andersson und Jean Louis Guyader: *Intensity potential approach for modeling high-frequency sound fields*. Acta Acustica united with Acustica, 97(1):103–114, 2011.

[9] Wang, A., N. Vlahopoulos und K. Wu: *Development of an energy boundary element formulation for computing high-frequency sound radiation from incoherent intensity boundary conditions*. Journal of Sound and Vibration, 278(1-2):413–436, 2004.