Systemidentifikation von diskreten Schwingungssystemen mit Beschleunigungssignalen

Yaxiong Ren[1], Christian Adams[1], Tobias Melz[1,2]

[1] *Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Systemzuverlässigkeit, Adaptronik und Maschinenakustik SAM, Otto-Berndt-Straße 2, 64287 Darmstadt*

E-Mail: yaxiong.ren@sam.tu-darmstadt.de

[2] *Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF, Bartningstraße 47, 64289 Darmstadt*

Einleitung

Das Framework *Spärliche Identifikation Nichtlinearer Dynamischer Systeme* (SINDy) identifiziert die polynomische Bewegungsgleichung von dynamischen Systemen durch spärliche Regression [1]. Bei der Identifikation von Schwingungssystemen durch SINDy werden die zeitlichen Signale von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Verschiebung als Trainingsdaten verwendet [2, 3]. In der Praxis wird in diesem Zusammenhang häufig lediglich die Beschleunigung gemessen, um die Kosten und die Komplexität zu reduzieren. Dieser Beitrag bezieht sich auf die Anwendung des SINDy-Frameworks mit Beschleunigungssignalen und der *kleinsten-Quadrat-post-LASSO-Methode* (KQPL) [3] zur Systemidentifikation der freischwingend oder periodisch angeregten diskreten Systeme. Zur Rekonstruktion der Verläufe der Geschwindigkeit und der Verschiebung werden die IFFT-Methode (Inverse Fast Fourier Transform), das explizite Einschrittverfahren und die Trapezregel anhand von numerisch erzeugten Messdaten verglichen. Darüber hinaus werden die rekonstruierten Signale mithilfe der Mittellinie der Hüllkurven korrigiert. Der Workflow mit SINDy-KQPL und Beschleunigungssignalen wird auf einen gemessenen Datensatz angewendet und im Vergleich mit den theoretischen Daten validiert.

Rekonstruktion der Signale

Um die Geschwindigkeit und Verschiebung zu rekonstruieren, wird das Signal der Beschleunigung zweimal zeitlich integriert. Bei der Integration ist eine starke Abweichung bekannt, die auf Rauschen [4] bzw. Offset im Integranden beruht. In der Abbildung 1 wird hierfür ein Beispiel gezeigt. Die Beschleunigung in der Abb. 1-(a) wird aus einer numerischen Simulation eines freischwingenden Einmassenschwingers ausgelesen. Das Beschleunigungssignal enthält ein virtuelles Messrauschen mit dem Signal-to-Noise-Ratio von 40 dB . Nach zweimaliger Integration mit Trapezregel schwankt die Verschiebung in der Abb. 1-(c) sichtbar, welche eine Abweichung in der Mittellinie aufweist. Somit ist die Auswahl einer geeigneten Methode zur Rekonstruktion der fehlerhaften Signale von Interesse. Im Folgenden werden drei Methoden verglichen, das explizite Einschrittverfahren, die Trapezregel und die IFFT-Methode. Die Abweichung bei IFFT-Methode wird auch diskutiert.

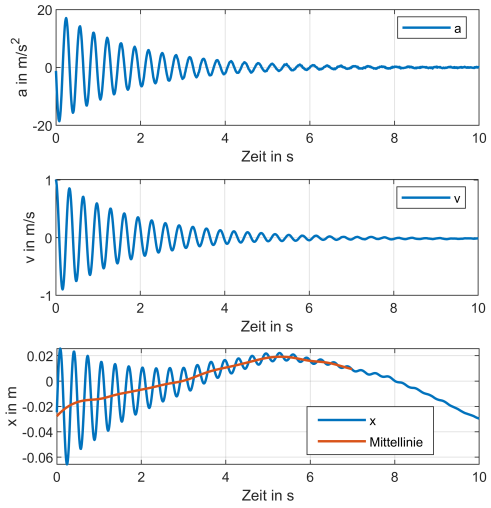


Abbildung 1: Simulierte Beschleunigung eines freischwingenden Einmassenschwingers (a); durch Trapezmehtode rekonstruierte Geschwindigkeit (b) und Verschiebung (c)

Die Rekonstruktion der Geschwindigkeit aus der Beschleunigung in der Abb. 1-(a) wird als ein einfaches Beispiel genommen. Durch das explizite Einschrittverfahren

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t \tag{1}$$

und die Trapezregel

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})\Delta t \tag{2}$$

werden zwei Signale von Geschwindigkeiten generiert. In der Abb.2-(a) fallen die durch explizites Einschrittverfahren und Trapezregel generierten Signalen mit dem idealen Signal fast zusammen.

Der theoretische Hintergrund der IFFT-Methode liegt in der Integrationseigenschaft der Fourier-Transformation (FT) [5]

$$\mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega). \tag{3}$$

Dabei stellt $F(\omega)$ die FT des zeitlichen Signals $f(\tau)$ dar. Bei der freien Schwingung verschwindet der statische Teil der Geschwindigkeit v und Verschiebung x. Daher wird

der zweite Term $\pi F(0)\delta(\omega)$ auf der rechten Seite der Gleichung 3 zu null gesetzt. Somit erfolgt die zeitliche Integration des Signals $f(\tau)$ mit der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \ = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)\}. \tag{4}$$

In der Integration von der Beschleunigung a zur Geschwindigkeit v wird die Gleichung 4 wie die Gleichung

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathcal{F}(a(t))\} \tag{5}$$

interpretiert. Mit der Umsetzung in die numerische Berechnung zeigt die Geschwindigkeit

$$v(t) = \mathrm{IFFT}\{\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{FFT}(a(t))\} \tag{6}$$

in der Abb. 2-(a) einen Drift.

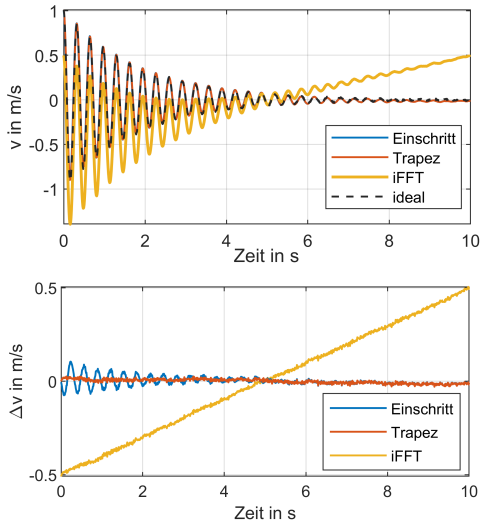


Abbildung 2: Vergleich der durch Einschrittverfahren, Trapezregel und IFFT-Methode generierten Geschwindigkeiten (a) und deren Abweichungen bzgl. des idealen Signals (b)

Genaue Analysen der Abweichungen werden mit Hilfe der Abb. 2-(b), die die Abweichungen Δv von drei Methoden bzgl. des idealen Signals zeigt, durchgeführt. Die Drift-Abweichung betrifft nicht nur die IFFT-Methode, sondern auch das Einschrittverfahren und die Trapezregel, deren Kurven der Abweichungen fallen mit zunehmender Zeit leicht ab. Außerdem gibt es beim Einschrittverfahren eine große Schwankung in der Abweichung, die einen Phasenunterschied der rekonstruierten Geschwindigkeit im Vergleich mit dem idealen Signal aufweist. Die Abweichung bei Trapez- und IFFT-Methode sind linear in Bezug auf die Zeit mit geringem Rauschen. Das bedeutet, dass die Abweichung Δv mit Trapez- und IFFT-Methode hauptsächlich einer Abweichung der Ruhelage (Mittellinie) entspricht. Demgegenüber sind die Amplituden um die Mittellinien wenig beeinträchtigt. Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Trapezregel die geringste Abweichung der drei Methoden aufweist.

Die Entstehung der starken Drift-Abweichung bei der IFFT-Methode kann mithilfe des Faltungstheorems [5]

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \tag{7}$$

erklärt werden. Wenn die Funktion f als Beschleunigung $a(t)$ und die Funktion g als ein Halb der Vorzeichenfunktion (Abb. 3)

$$\mathrm{sgn}(t) := \begin{cases} +1, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t = 0 \\ -1, & \text{falls } t < 0 \end{cases} \tag{8}$$

angenommen werden, entspricht die hergeleitet Gleichung

$$\mathcal{F}(a(t) * \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)) = \mathcal{F}(a(t)) \cdot \frac{1}{\mathrm{j}\omega} \tag{9}$$

der vereinfachten Integrationseigenschaft der FT in der Gleichung 5, da $\mathrm{sgn}(t)$ die Eigenschaft

$$\mathcal{F}(\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} \tag{10}$$

hat [5]. Deswegen gilt

$$v(t) = a(t) * \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t). \tag{11}$$

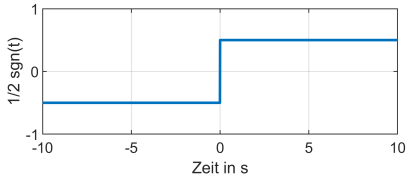


Abbildung 3: Zeitliches Signal von $\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$

Bei der numerischen Berechnung können nur diskrete Daten im Zeitbereich und Frequenzbereich durch Computer behandelt werden. Gemäß der Regel von diskreter FT in der Tabelle 1, hat ein zeitlich diskretes Signal ein periodisches Spektrum. Umgekehrt gilt die Regel auch, dass ein diskretes Spektrum im Frequenzbereich zu einem periodischen zeitlichen Signal führt [6] . Das heißt, dass der Algorithmus FFT im Hintergrund das nicht-periodisch zeitlich diskrete Signal periodisch macht, sodass der Frequenzgang periodisch und diskret ist. Als Standard gibt der Algorithmus FFT nur ein Hauptintervall in den unendlich periodischen Signalen oder Spektren aus.

Zeitbereich		Frequenzbereich
diskret	→	periodisch
periodisch	←	diskret

Tabelle 1: Eigenschaft der diskreten FT, nach [6]

Im analytischen Fall strebt der Absolutwert des Spektrums $\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ bei $\omega \to \pm\infty$ gegen null. Aber im Hintergrund der FFT wiederholt sich das Hauptintervall (Abb. 4-(a))

von $\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ im Frequenzbereich periodisch (Abb. 4-(b)). Deswegen weicht IFFT($\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$) von $\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{\mathrm{j}\omega})$ ab, wie die Abb. 4-(c) im Vergleich mit Abb. 3 zeigt. Somit entsteht die starke Driftabweichung im Ergebnis.

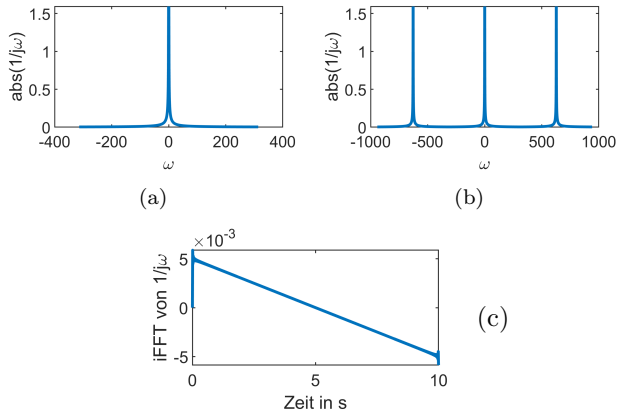


Abbildung 4: numerisch behandeltes Spektrum $\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ im Hauptintervall (a) und mit periodischer Erweiterung der Frequenzgang (b); Signal IFFT($\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$) im Zeitbereich (c)

Korrektur der Integration

Anhand der vorgenommenen Analyse mit der Abb. 2-(b) wird festgelegt, dass die Abweichung bei IFFT- und Trapezregel wenig in den Amplituden, sondern hauptsächlich in den Mittellinien

$$v_{Mitte} = \frac{v_{oH} + v_{uH}}{2} \tag{12}$$

besteht. Dabei entsprechen die Signale v_{oH} und v_{uH} die obere Hüllkurve und untere Hüllkurve des Beispiels in der Abb.5-(a). Somit ist die Annahme getroffen, dass die Mittellinie des Geschwindigkeitssignals eines freischwingenden oder periodisch angeregten Systems auf Achse $v(t) = 0\mathrm{m/s}$ liegen sollen. Dementsprechend verteilen sich die obere und untere Hüllkurven symmetrisch um die Zeitachse. Um die Abweichung in der Mittellinie zu vermeiden, wird das Signal v_{Mitte} vom nicht korrigierten Signal v mit der Gleichung

$$v_{Korr} = v - v_{Mitte} \tag{13}$$

subtrahiert. Nach der Korrektur fallen die Ergebnisse der IFFT-Methode mit dem idealen Signal zusammen.

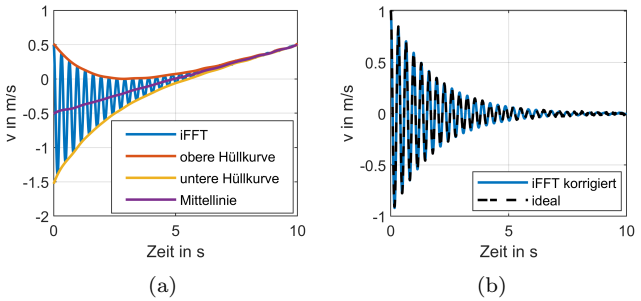


Abbildung 5: Geschwindigkeit $v(t)$ aus IFFT-Methode vor der Korrektur (a) und nach der Korrektur mit Subtraktion der Mittellinie (b)

Da die Trapezregel die geringste Abweichung im Vergleich zum Einschrittverfahren und zur IFFT-Methode hat, wird die Gleichung 13 auch mit der Trapezregel verwendet. Mit der Korrektur wird die relative Abweichung

$$\frac{\mathrm{rms}(v_{Korr} - v_{ideal})}{\mathrm{rms}(v_{ideal})} \tag{14}$$

von $5,24\%$ auf $2,79\%$ reduziert. Daher wird die Trapezregel mit der Korrektur im Folgenden experimentell validiert.

Experimentelle Validierung

Das Systemidentifikationsverfahren SIDNy-KQPL [1, 3] wird mit dem Prüfstand [7] in der Abb. 6 experimentell ausschließlich mit Beschleunigungssignal validiert. Der Prüfstand hat einen Einmassenschwinger, der aus einer Masse und zwei Blechfedern in einem starren Käfig besteht. Mit weichen Seilen wird der Käfig auf einem Rahmen aufgehängt. Die rechte Seite des Käfigs wird im Anschluss daran mit einem Shaker gekoppelt, um den Schwinger am Fußpunkt mit Sweep-Signal anzuregen. Der Signalgenerator und der Verstärker sind für die Steuerung der Anregung verantwortlich. Zwei Beschleunigungssensoren messen die absoluten Beschleunigungen an der Masse a_{abs} und am Fußpunkt $a_{Fuß}$. Die erfassten Signalen werden in einem Aufzeichnungssystem gespeichert.

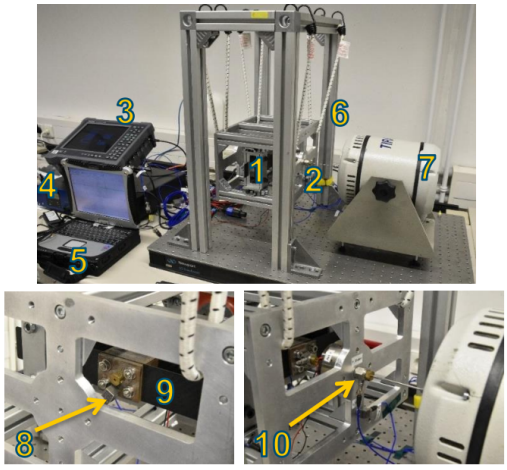


Abbildung 6: Prüfstand des am Fußpunkt angeregten Einmassenschwingers; 1: Schwinger (Grafik links unten), 2: Anregungspunkt (Grafik rechts unten), 3: Signalgenerator, 4: Verstärker, 5: Daten-Aufzeichnung, 6: Rahmen, 7: Shaker, 8: Beschleunigungssensor an der Masse, 9: Masse und Blechfeder im Käfig, 10: Beschleunigungssensor am Fußpunkt

Bei der Anregung am Fußpunkt lautet die Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers:

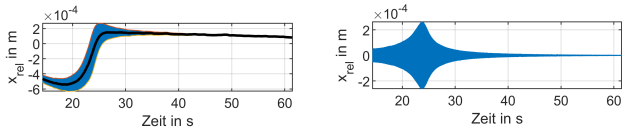
$$a_{abs} = -\omega_0^2 x_{rel} - 2D\omega_0 v_{rel}. \tag{15}$$

Dabei stehen v_{rel} und x_{rel} für die relative Geschwindigkeit und Verschiebung der Masse in Bezug auf dem Fußpunkt. ω_0 und D stellen die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad dar. Mit einmaligen bzw. zweimaligen Integrationen und Korrekturen werden v_{rel} und x_{rel} auf

der relative Beschleunigung

$$a_{rel} = a_{abs} - a_{Fuß} \tag{16}$$

rekonstruiert. Wie in der Abb. 7 gezeigt, schwankt die Mittellinie der Verschiebung x_{rel} vor der Korrektur offensichtlich. Ein Signal ohne sichtbare Schwankung taucht nach der Korrektur auf.



(a) (b)

Abbildung 7: rekonstruierte Verschiebung x_{rel} vor der Korrektur (a) und nach der Korrektur (b)

Bei der Identifikation mit SINDy-KQPL wird angenommen, dass die absolute Beschleunigung a_{abs} von der rekonstruierten relativen Geschwindigkeit v_{rel} und der Verschiebung x_{rel} abhängt. Daher wird die Identifikation mithilfe der spärlichen Regression durch die Gleichung

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{\Theta}([\mathbf{x}_{rel}\ \mathbf{v}_{rel}])\xi \tag{17}$$

formuliert. Dabei ist $\mathbf{\Theta}([\mathbf{x}_{rel}\ \mathbf{v}_{rel}])$ die Sammlung der polynomischen Kandidatenfunktionen von $\mathbf{x}_{rel}$ und $\mathbf{v}_{rel}$ bis Polynom fünfter Ordnung. Außerdem stellt $\xi = [\xi_1, \xi_2, ...]$ die Koeffizienten der Kandidatenfunktionen dar [1, 3]. Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse der Identifikation mit drei Stufen von Anregungsintensitäten, die durch Peaks F_{max} in den Verläufen der Anregungskräfte gekennzeichnet werden.

Nr.	F_{max} in N	Koeffizient	
		ξ_2(entspr. ω_0^2)	ξ_3(entspr. $2D\omega$)
1	5,4	-46538	-21,1
2	10,6	-46781	-21,2
3	21,6	-47379	-21,6

Nr.	Relative Abweichung		R^2
	$\frac{\lvert\xi_2\rvert-\omega_0^2}{\omega_0^2}$	$\frac{\lvert\xi_3\rvert-2D\omega_0}{2D\omega_0}$	
1	6,5%	26,3%	0,9994
2	7,1%	27,0%	0,9997
3	8,5%	29,3%	0,9996

Tabelle 2: Ergebnisse der Systemidentifikation

Die theoretischen Werte von ω_0^2 und $2D\omega$ betragen jeweils $43682s^{-2}$ und $16,7s^{-1}$ (modifiziert von [7]). Bei allen drei Versuchen sind die identifizierten Parameter konsistent. Das heißt, dass die relative Abweichungen von ξ_2 und ξ_3 im Vergleich mit den theoretischen Werten jeweils unter 10% und 30% bleiben. Die Bestimmtheitsmaß R^2 liegen zufriedenstellend in der Nähe von eins. Außerdem wird keine nichtlineare Kandidatenfunktion mit höherer Ordnung identifiziert. Darüber hinaus ist eine Tendenz feststellbar, dass die relative Abweichungen der identifizierten Parameter leicht mit zunehmender Anregungsintensität steigen. Eine potenzielle Erklärung dafür liegt in den Einfluss von der Steifigkeit des Käfigs, da der Käfig nicht ideal starr ist. Oder der Workflow weist einen Unterfitting auf, sodass einige Kandidatenfunktionen höherer Ordnung im SINDy-Modell fehlen.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit ist ein Workflow für Systemidentifikation von diskreten Schwingungssystemen mit Beschleunigungssignalen aufgebaut werden. Um die Signale von Geschwindigkeit und Verschiebung für SINDy-KQPL-Methode bereitzustellen, werden die fehlenden Signale aus Beschleunigung einmal bzw. zweimal mit der Trapezregel integriert und anschließend durch Subtraktion der Mittellinien korrigiert. Mit Experimenten eines durch Sweep-Signal am Fußpunkt angeregten Einmassenschwingers wird der Workflow erfolgreich validiert. Allerdings ist die Abhängigkeit der identifizierten Parameter von der Anregungsintensität noch zu untersuchen und zu erklären.

In der weiteren Arbeit soll der Workflow mit realen Anwendungsszenarien, z. B. mit Fahrwerke der Automobile, getestet werden. Außerdem soll in diesem Zusammenhang die Automatisierung der Erkennung von Hüllkurven untersucht werden.

Literatur

[1] Brunton, S. L., Proctor, J. L., Kutz, J. N.: Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. In: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 113 (15), S. 3932–3937, 2016.

[2] Adams, C., Bös, J., Melz, T.: Evidenzbasierte Modellierung von Schwingungssystemen. In: DAGA – Deutsche Jahrestagung für Akustik, Deutschland, 18.-21. März 2019, S. 449–452, 2019.

[3] Ren, Y., Adams, C., Melz, T.: Systemidentifikation eines Einmassenschwingers mit spärlicher linearer Regression. In: DAGA – Deutsche Jahrestagung für Akustik, Deutschland, 16.-19. März 2020, S. 567–570, 2020.

[4] Thong, Y. K., Woolfson, M. S., Crowe, J. A., Hayes-Gill, B. R., Jones, D. A.: Numerical double integration of acceleration measurements in noise. Measurement 36 (1), S. 73–92, 2004.

[5] Klostermeyer, R.: Digitale Modulation: Grundlagen, Verfahren, Systeme. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2001.

[6] Neubauer, A.: DFT - Diskrete Fourier-Transformation. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.

[7] Lenz, J., Platz, R.: Quantification and Evaluation of Parameter and Model Uncertainty for Passive and Active Vibration Isolation. In: Model Validation and Uncertainty Quantification Vol. 3, S. 135–147, Springer Verlag, Cham, 2020.