Sphärische „One-Way“ Wellengleichung

O. Bschorr [1] , H.-J. Raida

[1] *Daimler AG, Stuttgart*

Zusammenfassung

Es wurde die koordinatenfreie “One-way wave equation” auf sphärische Koordinaten umgeschrieben. Dazu war es notwendig, Konsistenz zwischen den radialen Laplace-, Nabla- und div-Operatoren herzustellen und den konventionellen, radialen Gradienten $\nabla_r\Phi = \partial\Phi/\partial r$ durch die hypothetische Vorschrift $\partial r\Phi/r\partial r$ zu ersetzen. Beide Versionen unterscheiden sich nur durch den Nahfeldterm Φ/r, im Fernfeld mit $r >> 0$ besteht eine asymptotische Annäherung. Überraschend bringt der hypothetische Gradient bei – und nur bei – Kugelwellen mit der 1/r-Entfernungsabnahme unerwartete Vereinfachungen: So bleibt die Rechnung stets elementar und ohne die wattlosen, imaginären Nahfelder. Auch werden die bei konventioneller Rechnung auftretenden Bessel- und Legendre-Funktionen obsolet. Dies gilt nicht nur für akustische sondern auch für elektromagnetische Wellen.

Einleitung

Die konventionelle Berechnung elastischer Wellen folgt der allbekannten, vor zwei Jahrhunderten von Cauchy paraphierten 1. Bewegungsgleichung: Danach verursacht eine vektorielle, elastische Auslenkung $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x},t)$ [m] in einem Kontinuum mit den ortsfesten kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}=\{x\mathbf{e}_x,y\mathbf{e}_y,z\mathbf{e}_z\}$ bei einem homogenen Elastizitätsmodul E [Pa] = const. den Spannungstensor $\mathbf{T} = E\nabla\mathbf{s}$ [Pa]. Die von $\mathbf{T}$ induzierte Kraft $\mathrm{div}\,\mathbf{T} = \mathrm{div}\,E\nabla\mathbf{s} = E\Delta\mathbf{s}$ [N/m^3] steht im lokalen Gleichgewicht mit der von der Beschleunigung $\mathbf{s}^{\circ\circ} = \partial^2\mathbf{s}/\partial t^2$ [m/s^2] verursachten d'Alembert's Trägheitskraft $\rho\mathbf{s}^{\circ\circ}$ [N/m^3].

$$\rho\mathbf{s}^{\circ\circ} - E\Delta\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Mit der Verschmelzung von Dichte ρ [kg/m^3] und E-Modul zur Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{(E/\rho)}$ [m/s] ergibt sich die für ein homogenes Medium maßgebende Wellengleichung

$$\mathbf{s}^{\circ\circ} - c^2\Delta\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Als partielle Differentialgleichung (PDG) 2. Ordnung liefert diese grundsätzlich zwei voneinander unabhängige Lösungen. Wie am quadratischen Geschwindigkeitsterm $c^2 = (+c)^2 = (-c)^2$ ersichtlich, sind dies die beiden in den entgegengesetzten Richtungen +c und –c laufenden Wellen, deswegen die Bezeichnung “Two-way wave equation”. Wegen dieser Doppeldeutigkeit treten bei numerischen, seismischen FE- bzw. FD-Wellenrechnungen irreguläre Phantom-Effekte auf, zu deren Ausschaltung die unterschiedlichsten Hilfsgleichungen entwickelt wurden, ohne dass sich bislang ein Ansatz durchsetzen konnte. Zu dieser „One-Way/Two-Way“-Problematik gibt es neben der Fachliteratur der wirtschaftlichen Bedeutung wegen auch einen umfangreichen Patentstock [1,2,3].

Diese Schwierigkeiten waren mit Anlass, das Kräftegleich-gewicht, zunächst hypothetisch, durch ein Impulsgleichgewicht, genauer: Impulsflussgleichgewicht zu ersetzen [4,5]. Kraft und Impuls sind verwandt und unterscheiden sich durch eine Differentiationsstufe. Dazu wurde auf die von der Karlsruher KPK-Schule eingeführte Impulseinheit Huygens Hy = Masse mal Geschwindigkeit [Hy=mkg/s] zurückgegriffen. So besteht bei einer Schnelle $\mathbf{s}^\circ = \partial\mathbf{s}/\partial t$ [m/s] der lokale spezifische Impuls $\rho\mathbf{s}^\circ$ [Hy/m^3]. Pflanzt sich die Schnelle $\mathbf{s}^\circ$ mit der Schallgeschwindigkeit $\mathbf{c}$ [m/s] fort, so ergibt das dyadische Produkt $\rho\mathbf{c}\mathbf{s}^\circ$ einen kinetischen Impulsfluss mit der Dimension [Hy/s m^2], also Huygens-(Hy) pro Zeit- und Flächeneinheit. Auf der anderen Seite induziert eine elastische Verformung $\nabla\mathbf{s}$ den potentielle Impulsfluss $\mathbf{T} = E\nabla\mathbf{s}$ [Hy/s m^2]. Während die Cauchy-Kräftebalance für ein infinitesimales Volumenelement dV = dx dy dz gilt, erfüllen der kinetische und der potentieller Impulsfluss in jedem Feldpunkt das lokale Gleichgewicht

$$\rho\mathbf{c}\mathbf{s}^\circ - E\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Diese Tensorgleichung skalar mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{c}$ multipliziert, ergibt zusammen mit dem Stoffgesetz (4) die vektorielle, partielle Differentialgleichung (PDG) 1. Ordnung (5)

$$E = \rho c^2 \qquad (4)$$

$$\mathbf{s}^\circ - \mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (5)$$

und stellt das Pendant zur kräftebasierten Wellengleichung (2) mit einer PDG 2. Ordnung dar. In Tabelle 1 sind die beiden Konzepte gegenübergestellt.

Die Wellengleichungen (2) und (5) sind aufgrund des Vektorcharakters koordinatenunabhängig und bei praktischer Anwendung auf das ausgewählte Koordinatensystem umzuschreiben. Eine derartige Transkription ist an sich eine reine Formsache. Während die Umschreibung auf kartesische Koordinaten erwartungsgemäß problemlos ist, trat bei den sphärischen Koordinaten ein unerwarteter Konflikt auf: Die konventionellen sphärischen Nabla ∇- und Laplace Δ-Operatoren erfüllen nicht die Identität $\nabla^2 = \Delta$. Als Schlüssel zur Lösung erweist sich der Ersatz des konventionellen radialen Nabla-Operators $\nabla_r\Phi = \partial\Phi/\partial r$ durch die hypothetische Vorschrift $\partial r\Phi/r\partial r$.

a	**Two-way Equation**	**One-way Equation**
b	**PDG 2. Ordnung**	**PDG 1. Ordnung**
c	Kraft F = J° [N]	Impuls J [Hy]
d	Newton N [kg m/s^2]	Huygens Hy [kg m/s]
e	$\rho\mathbf{s}^{\circ\circ} - \mathrm{div}\, E\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0}$	$\rho\mathbf{c}\mathbf{s}^{\circ} - E\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0}$
f	$\mathbf{s}^{\circ\circ} - c^2\Delta\mathbf{s} = \mathbf{0}$	$\mathbf{s}^{\circ} - \mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0}$
g	Lösung PDG 2. Ordnung $s_L = s_{L0}\ \exp i(\omega t \pm kx)$	
h	Lösung PDG 1. Ordnung $s_L = s_{L0}\ \exp i(\omega t - kx)$	

Tabelle 1: Gegenüberstellung von der kräftebasierter Two-way und der impulsbasierter One-way Wellengleichung. Zeile e enthält die konstituierenden Kräfte- bzw. Impulsbilanzen. Es resultieren die Wellengleichungen in Zeile f. Die PDG 2. Ordnung liefert nach der Zeile g eine doppeldeutige und die PDG 1. Ordnung nach Zeile h eine eindeutige Lösung.

Hier ist die Aufgabe gestellt, die konfliktbelastete Umschreibung der vektoriellen „One-way Wellengleichung“ auf Kugel-Koordinaten zu klären und experimentell nachprüfbare Ergebnisse bereitzustellen. Dazu wird zunächst auf die reine Kugelwelle ohne die Legendre Winkelfunktionen eingeschränkt: $\Phi(r,\vartheta,\varphi) \rightarrow \Phi(r)$. Vorweggenommen soll gesagt werden, dass der kompliziertere, hypothetische Gradient $\partial r\Phi/r\partial r$ gerade bei – und nur bei – Kugelwellen mit der 1/r-Entfernungsabnahme unerwartete Vereinfachung bringt. So bleibt die Rechnung stets elementar und a priori ohne die sperrigen, transzendenten Bessel- und Legendre-Funktionen und ohne die wattlosen, imaginären Nahfelder.

Konsistenz, Nabla-Operator

Der Aufgabe entsprechend und gemäß der Einschränkung auf Zentralfelder mit rein radialen Funktionen $\Phi(r,\vartheta,\varphi) \rightarrow \Phi(r)$ und $\mathbf{s}(r,\vartheta,\varphi) = \mathbf{s}(r)$ ist die reduzierte Kugelkoordinate $\mathbf{r} = r\mathbf{e_r}$ ausreichend. Auf die winkelabhängigen Terme wird im Anhang näher eingegangen. Relevant sind hier die in Tabelle 2, Spalte „Konvention“ wiedergegebenen radialen Operatoren Nabla-Gradient $\nabla_r\Phi$, Divergenz $\mathrm{div}_r\,\mathbf{s} = \nabla_r\cdot\mathbf{s}$ und Laplace $\Delta_r\Phi = \nabla_r\cdot\nabla_r\Phi$. Diese sind in allen Formelsammlungen enthalten, der Bestimmtheit wegen wird [6, S. 733] herangezogen.

Operation	**Konvention**	**Folgerung**
a Gradient	$\mathbf{grad}_r\Phi \equiv \nabla_r\Phi = \frac{\partial}{\partial r}\Phi$	$\nabla_r \rightarrow \nabla_a = \frac{\partial}{\partial r}$
b Divergenz	$\mathrm{div}\,\mathbf{s} \equiv \nabla_r\cdot\mathbf{s} = \frac{\partial r^2}{r^2\,\partial r}\mathbf{s}$	$\nabla_r \rightarrow \nabla_b = \frac{\partial r^2}{r^2\,\partial r}$
c Laplace	$\Delta_r\Phi \equiv \nabla_r^2\Phi = \frac{\partial r^2}{r^2\,\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi$	$\nabla_r \rightarrow \nabla_c = \frac{\partial r}{r\,\partial r}$

Tabelle 2: Grad-, div- und Laplace-Operator für ein Zentralfeld in symbolischer und Nabla-Schreibweise. Der Vergleich zeigt, dass bei allen drei Ausdrücken jeweils verschiedene Nabla-Versionen $\nabla_r = \{\nabla_a, \nabla_b, \nabla_c\}$ zugrunde liegen. Die allgemeine Identität $\Delta = \nabla^2$ wird aber nur von der Version $\nabla_c() = \partial r()/r\partial r$ erfüllt.

Offensichtlich bestehen drei verschiedene Nabla-Versionen:

$$\nabla_r = \{\nabla_a\,,\nabla_b\,,\nabla_c\} = \{\frac{\partial}{\partial r}\,,\frac{\partial r^2}{r^2\,\partial r}\,,\frac{\partial r}{r\,\partial r}\} \qquad (6)$$

Die Versionen ∇_a und ∇_b hintereinandergeschaltet, ergeben den Laplace-Operator $\nabla_b\nabla_a\Phi = \frac{\partial r^2}{r^2\,\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \Delta\Phi$. Aber weder ∇_a noch ∇_b erfüllen allein die allgemeine Identität [6, S.731]

$$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \Delta \qquad (7)$$

Die Radizierung $\Delta^{1/2} = \nabla = \nabla_c = \frac{\partial r\Phi}{r\,\partial r}$ liefert schließlich eine 3. Version, die per se die Bedingung (7) erfüllt. Mit dieser Begründung wird der radiale Nabla-Operator

$$\nabla_r\Phi = \mathbf{e_r}\cdot\nabla\Phi = \frac{\partial r\Phi}{r\,\partial r} \qquad (8)$$

als Hypothese übernommen und ist dem konventionellen Nabla-Operator in Tabelle 3 gegenübergestellt. Die Kontrollrechnung

$$\nabla_c\nabla_c = \Delta_r\Phi = \frac{\partial r}{r\,\partial r}\frac{\partial r\Phi}{r\,\partial r} = \frac{\partial}{r\,\partial r}\frac{\partial r\Phi}{\partial r} = \Phi'' + 2\Phi'/r \qquad (9)$$

zeigt die Übereinstimmung mit dem konventionellen Tafelwert $\Delta_r\Phi = \Phi'' + 2\Phi'/r$ und man erkennt die vereinfachte Formel (Setzungen: $\Phi' = \partial\Phi/\partial r$, $\Phi'' = \partial^2\Phi/\partial r^2$)

$$\Delta_r\Phi = \frac{\partial}{r\,\partial r}\frac{\partial r\Phi}{\partial r} = (r\Phi)''/r = \Phi'' + 2\,\Phi'/r \qquad (10)$$

	Konvention	**Hypothese**
a	$\nabla_r\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \Phi'$	$\nabla_r\Phi = \frac{\partial r\Phi}{r\,\partial r} = \Phi' + \Phi/r$
b	$\mathrm{div}_r\,\mathbf{s} = \frac{\partial r^2 s}{r^2\,\partial r} = s' + 2\,s/r$	$\mathrm{div}_r\,\mathbf{s} = \frac{\partial rs}{r\,\partial r} = s' + s/r$
c	$\Delta_r\Phi = \frac{\partial r^2}{r^2\,\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \Phi'' + 2\,\Phi'/r$	$= \Delta_r\Phi = \frac{\partial}{r\,\partial r}\frac{\partial r\Phi}{\partial r}$

Tabelle 3: Gegenüberstellung der konventionellen und der hypothetischen Operatoren $\nabla_r\Phi$, $\mathrm{div}_r\mathbf{s}$ und $\Delta_r\Phi$. Nach Zeile c stimmen beide Konzepte im Laplace-Operator $\Delta_r\Phi = \Phi'' + 2\,\Phi'/r$ überein, nicht aber beim Gradienten- und Divergenz-Operator.

Punctum saliens: Bei der hypothetischen $\nabla_r\Phi = \partial r\Phi/r\partial r$ Differentiation der speziellen Funktion $\Phi = \Psi/r$ mit der bei der Kugelwelle obligaten (1/r)-Abnahme, Setzung: $\Psi' = \partial\Psi/\partial r$

$$\nabla_r\frac{\Psi}{r} = \frac{\partial r\frac{\Psi}{r}}{r\,\partial r} = \frac{\partial\Psi}{r\,\partial r} = \frac{\Psi'}{r} \qquad (11)$$

bleibt die (1/r)-Eigenschaft erhalten, auch bei mehrmaliger ∇_r-Differentiation!

$$\nabla_r\nabla_r\nabla_r\ldots[n]..\,\nabla_r\frac{\Psi}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^n\Psi}{\partial r^n} \qquad (12)$$

Diese vorteilhafte Eigenschaft zeigt sich in Tabelle 4 wenn die spezifische Impedanz z = p/v einerseits nach der Tafel-vorschrift $\nabla_r\Phi = \partial\Phi/\partial r$ und andererseits entsprechend der Hypothese $\nabla_r\Phi = \partial r\Phi/r\partial r$ berechnet wird. In beiden Fällen wird nach Zeile c vom bekannten Geschwindigkeitspotential G = G(r,t) [7, S. 33] ausgegangen und liefert nach den Zeilen d und e die Schnelle v und den Schalldruck p und damit die spezifische Impedanz z = p/v (Zeile f).

a	**Konvention**	**Hypothese**
b	**Nabla** $\nabla_r\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$	**Nabla** $\nabla_r\Phi = \frac{\partial r\Phi}{r\partial r}$
c G-Potential	$G = \frac{G_0}{r}\exp i(\omega t - kr)$	$G = \frac{G_0}{r}\exp i(\omega t - kr)$
d Schnelle v	$v = -\frac{\partial G}{\partial r} = (\frac{1}{r} + ik)\,G$	$v = -\frac{\partial rG}{r\,\partial r} = ik\,G$
e Druck p	$p = \rho\frac{\partial G}{\partial t} = \rho\, i\omega\, G$	$p = \rho\frac{\partial G}{\partial t} = \rho\, i\omega\, G$
f Impedanz z	$\underline{z} = \rho c\frac{(kr)^2 + ikr}{1+(kr)^2}$	$z = \frac{p}{v} = \frac{\rho\, i\omega}{ik} = \rho c$

Tabelle 4: Berechnung der spezifischen Impedanz z = p/v mit dem konventionellen Nabla-Operator $\nabla_r\Phi = \partial\Phi/\partial r$ [7, S.33] und dem hypothetischen Nabla $\nabla_r\Phi = \partial r\Phi/r\partial r$.

Am Beispiel der spezifischen Impedanz z = p/v soll der numerische Unterschied der beiden konkurrierenden Nabla-Versionen aufgezeigt werden. Nach Tabelle 4 Zeile f wird die auf ρc normierte konventionelle Impedanz $z_K/\rho c$ auf Polarform mit Amplitudenfunktion A_K [-] und Phase φ_K [rad] gebracht

$$\underline{z}/\rho c = \frac{(kr)^2 + ikr}{1+(kr)^2} = A_K \exp i\varphi_K \qquad (13)$$

$$A_K = \frac{kr}{\sqrt{1+(kr)^2}} \qquad (14)$$

$$\varphi_K = \text{arc ctg } kr = \text{arc ctg } 2\pi r/\lambda \qquad (15)$$

Beim hypothetischen Konzept mit $z/\rho c = 1$ vereinfachen sich Amplitudenfunktion A_H [-] und Phase φ_H [rad] zu

$$A_H = 1 \qquad (16)$$

$$\varphi_H = 0 \qquad (17)$$

In Abbildung 1 bzw. 2 werden die Amplitudenfunktion bzw. die Phase der auf dem konventionellen und dem hypothetischen Nabla-Operator basierenden Impedanzen verglichen.

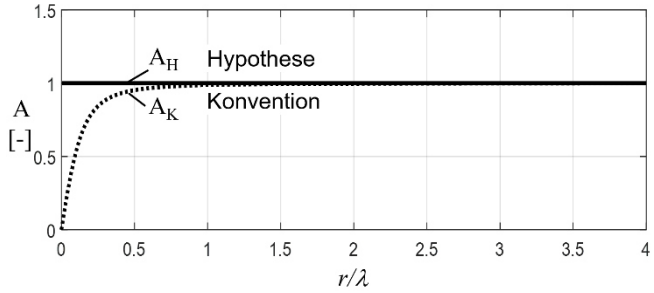

Abbildung 1: Vergleich der Amplitudenfunktionen A bei der sphärischer Wellenausbreitung in Abhängigkeit von der normierten Entfernung r/λ [-] für den konventionellen Nabla-Operator $\nabla_r\Phi = \partial\Phi/\partial r$ und hypothetischen Nabla-Operator $\nabla_r\Phi = \partial r\Phi/r\partial r$. Bei r/λ = 1, bei einem Abstand r von einer Wellenlänge λ, beträgt der Amplitudenunterschied 1,2%. Bei r/λ > 3 wird der Unterschied kleiner 0,1%. In der Praxis wird der Nahfeld-Einfluss meist vernachlässigt. In diesem Fall wäre es einfacher, anstelle des konventionellen direkt den hypothetischen Nabla-Operator einzusetzen.

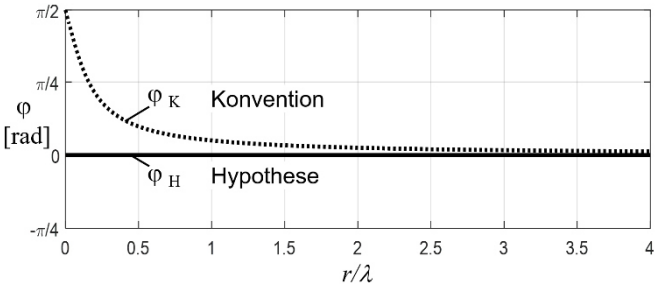

Abbildung 2: Vergleich der Phasen φ bei sphärischer Wellenausbreitung in Abhängigkeit von der normierten Entfernung r/λ [-] für den konventionellen Nabla-Operator $\nabla_r\Phi = \partial\Phi/\partial r$ und hypothetischen Nabla-Operator $\nabla_r\Phi = \partial r\Phi/r\partial r$. Bei r/λ = 1 beträgt der Phasendifferenz 0,158 [rad] = 9°. Bei r/λ > 3 ist der Unterschied < 3°. Nicht nur in der Audiologie spielt die Phase eine untergeordnete Rolle.

Anhang A: Kugel-Koordinaten r, ϑ und φ

Operator	**r-Komp.**	**ϑ-Komponente**	**Φ-Komp.**
Gradient $\nabla\Phi =$	$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e_r}$ +	$\frac{\partial\Phi}{r\,\partial\vartheta}\mathbf{e_\vartheta}$ +	$\frac{\partial\Phi}{r\sin\vartheta\,\partial\varphi}\mathbf{e_\varphi}$
Laplace $\Delta\Phi =$	$\frac{\partial r^2}{r^2\,\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ +	$\frac{\partial}{r^2\sin\vartheta\,\partial\vartheta}\frac{\partial\Phi\sin\vartheta}{\partial\vartheta}$ +	$\frac{\partial^2\Phi}{(r\sin\vartheta)^2\,\partial\varphi^2}$

Tabelle 5: Konventionelle Tafelwerte ∇Φ und ΔΦ in Kugel-Koordinaten r, ϑ, φ für die Funktion Φ = Φ(r,ϑ,φ) [6, S.733]. Nicht nur bei der r-Komponente sondern auch bei der ϑ-Komponente ist die Identität $\nabla^2 \equiv \Delta$ [6, S.731] verletzt.

Anhang B: Zylinder-Koordinaten r, φ und z

Operator	**r-Komp.**	**φ-Komponente**	**z-Komp.**
Gradient $\nabla\Phi =$	$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e_r}$ +	$\frac{\partial\Phi}{r\,\partial\varphi}\mathbf{e_\varphi}$ +	$\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e_z}$
Laplace $\Delta\Phi =$	$\frac{\partial r}{r\,\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ +	$\frac{\partial^2\Phi}{r^2\,\partial\varphi^2}$ +	$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

Tabelle 6: Zusammenstellung der Tafelwerte ∇Φ und ΔΦ in Zylinder-Koordinaten r, φ, z für die Funktion Φ = Φ(r,φ,z) [6, S.733]. Bei der radialen Komponente ist die Identität $\nabla^2 \equiv \Delta$ verletzt.

Literatur

[1] G. Seriani, S.P. Oliveira, Numerical modeling of mechanical wave propagation, La Rivista del Nuovo Cimento, Volume 43, Issue 9, p. 459-514 (2020)

[2] D. A. Angus: The One-Way Wave Equation: A Full-Waveform Tool for Modeling Seismic Body Wave Phenomena, Surveys in Geophysics (2014) 35, p. 359 – 393.

[3] Halliburton Energy Services: Hybrid one-way and full-way wave equation migration, US-Patent Nr. 8 116 16

[4] O. Bschorr: Deviationswellen im Festkörper, DAGA-Fortschritte der Akustik (2014) S. 80/81

[5] O. Bschorr, H.-J. Raida: One-Way Wave Equation Derived from Impedance Theorem, Acoustics 2020, 2(1), p. 164-170 https://doi.org/10.3390/acoustics2010012

[6] I. N. Bronstein et al: Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, Verlag Europa-Lehrmittel (2018)

[7] R. Lerch et al: Technische Akustik, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2009)