Inhomogene „One-way“ Wellengleichung

O. Bschorr
Daimler AG, Stuttgart

Zusammenfassung.

Es geht um die Schallausbreitung in isotropen, inhomogenen Medien. Konventionelle Berechnungsgrundlage dazu ist die auf einem lokalen Kräftegleichgewicht beruhende 1. Cauchy-Bewegungsgleichung. Diese liefert als partielle Differentialgleichung (PDG) 2. Ordnung grundsätzlich zwei voneinander unabhängige Lösungen, deswegen die Bezeichnung “Two-way wave equation“. Ob dieser inhärenten Doppeldeutigkeit kommt es bei numerischen FE- bzw. FD-Rechnungen zu irregulären Phantom-Effekten. Zu deren Ausschaltung sind unter dem Sammelbegriff „One-way wave equation“ die verschiedensten Verfahren in Gebrauch. Eine Lösung ist, das Kräfte- durch ein Impulsgleichgewicht zu ersetzen. Kraft und Impuls sind verwandt und der impulsbasierte Ansatz führt auf eine sehr viel einfachere PDG-Wellengleichung 1. Ordnung mit einer eindeutigen Lösung. Für die Wellenrechnung in inhomogenen Medien wurde dazu ein numerisches FD-Verfahren entwickelt.

Einleitung.

Seismik, Sonar, Raum- und Maschinenakustik, nicht zuletzt Ultraschall-Diagnose und -Tomografie. All diese Fächer sind auf die Berechnung der Schallpfade in festen, fluiden und gasförmigen Aggregaten in den unterschiedlichsten Formationen angewiesen. Berechnungsgrundlage ist die vor 200 Jahren von Cauchy paraphierte 1. Bewegungsgleichung. Diese beruht auf einem lokalen Kräftegleichgewicht und ist eine partielle Differentialgleichung (PDG) 2. Ordnung. Speziell zur seismischen Prospektion gibt es der wirtschaftlichen Bedeutung wegen die verschiedensten FE- und FD- Lösungsmethoden. Probleme bereiten einmal die riesigen Datenmengen von Giga- bis Tera-Knoten und CPU-Rechenzeiten von Stunden bis Wochen. [1. S.460].

Zu andern liefert eine PDG 2. Ordnung grundsätzlich zwei voneinander unabhängige Lösungen, deswegen die Bezeichnung “Two-way wave equation”. Wie an dem quadratischen Geschwindigkeitsterm $c^2 = (+c)^2 = (-c)^2$ ersichtlich, sind dies die beiden in entgegengesetzte Richtungen +c und –c laufenden Wellen und entsprechen so dem bei Resonanz gegebenen stehendem Wellenfeld. Ob dieser inhärenten Doppeldeutigkeit kommt es zu irregulären Phantom-Effekten. Zu deren Ausschaltung wurden unter dem Sammelbegriff „One-way wave equation“ die verschiedensten Abhilfen erprobt, ohne dass sich eine Lösung durchsetzen konnte. [2][3].

Diese Schwierigkeiten waren mit Anlass das Kräftegleichgewicht, zunächst hypothetisch durch ein Impulsgleichgewicht, genauer: Impulsflussgleichgewicht zu ersetzen [4]. Kraft und Impuls sind verwandt und unterscheiden sich durch eine zeitliche Differentiationsstufe. Dazu wurde auf die von der Karlsruher KPK-Schule eingeführte Impulseinheit Huygens Hy = Masse mal Geschwindigkeit [Hy=mkg/s] zurückgegriffen. So besteht bei einer vektoriellen Schnelle $\mathbf{s}^\circ = \partial\mathbf{s}/\partial t$ [m/s] und der Dichte ρ [kg/m³] der lokale spezifische Impuls $\rho\mathbf{s}^\circ$ [Hy/m³]. Pflanzt sich die Schnelle $\mathbf{s}^\circ$ mit der Schallgeschwindigkeit **c** [m/s] fort, so ergibt das dyadische Produkt $\rho\mathbf{c}\mathbf{s}^\circ$ einen kinetischen Impulsfluss der Dimension [Hy/s m²], also Huygens-[Hy] pro Zeit- und Flächeneinheit. Auf der anderen Seite induziert eine elastische Verformung $\nabla\mathbf{s}$ in einem inhomogenen Festkörper mit dem Elastizitätsmodul $E = E(\mathbf{x})$ [Pa] den potentiellen Impulsfluss $\mathbf{T} = \nabla E\mathbf{s}$ [Hy/s m²]. Während die Cauchy-Kräftebalance für ein infinitesimales Volumenelement dV = dx dy dz gilt, bilden kinetischer und potentieller Impulsfluss in jedem Feldpunkt das lokale Gleichgewicht

$$\rho\mathbf{c}\mathbf{s}^\circ - \nabla E\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Diese Tensor-Gleichung skalar mit dem Geschwindigkeitsvektor **c** multipliziert, ergibt mit dem bekannten Stoffgesetz: $E = \rho c^2$ die vektorielle, partielle Differentialgleichung (PDG) 1. Ordnung für die Feldvariable (E**s**).

$$\rho c^2\mathbf{s}^\circ - \mathbf{c}\cdot\nabla E\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad (E\mathbf{s})^\circ - \mathbf{c}\cdot\nabla(E\mathbf{s}) = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Im homogenen Fall E = const vereinfacht sich $\mathbf{s}^\circ - \mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Diese auf einem hypothetischen Impulsgleichgewicht beruhenden Wellen-Gleichungen lassen sich direkt über das Impedanz-Theorem begründen. [5]. Eine weitere Bestätigung liefert die Faktorisierung. [7].

Inhomogener Wellenleiter. FD-Programm [6]

Tab. 1 Feldvariable. Geometrie. Nach Tab. 1a wird das zu berechnende Schallfeld in ortsfesten, kartesischen Koordinaten mit dem Vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{x}_1 + x_2\mathbf{x}_2 + x_3\mathbf{x}_3$ [m] beschrieben. Nach Tab. 1b ist das im Allgemeinfall inhomogene Medium durch den Elastizitätsmodul $E = E(\mathbf{x})$, den Schubmodul $G = G(\mathbf{x})$ und die Dichte $\rho = \rho(\mathbf{x})$ [kg/m³] festgelegt. Daraus ergeben sich die longitudinale $c_L = \sqrt{E/\rho}$ [m/s] und die transversale Schallgeschwindigkeit $c_T = \sqrt{G/\rho}$ [m/s]. Die zugeordneten irreversiblen Verluste können durch komplexe Module nachgebildet werden. Vektorielle Größen sind durch Fettdruck gekennzeichnet. Die primäre Feldvariable ist die vektorielle elastische Auslenkung $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ [m] aus der Ruhelage. Nach Tab. 1d bis 1g wird die Gesamtauslenkung nach

$$\mathbf{s} = \mathbf{q} + \mathbf{r} \qquad (3)$$

in eine longitudinale $\mathbf{q} := \mathbf{s}_L$ [m] und eine transversale $\mathbf{r} := \mathbf{s}_T$ [m] Komponente aufgeteilt. Die zeitlichen Ableitungen von # = {**s, q, r**} sind $\#^\circ = \partial\#/\partial t$ [m/s] und die räumlichen $\nabla\# = \partial\#/\partial\mathbf{x}$ [-]. In der weiteren Beschreibung werden die Infinitesimale $\partial\#$, ∂t, dt und $\partial\mathbf{x}$ beibehalten, aber auf finite Größen erweitert.

Die Stufung der finiten Schrittweiten erfolgt entsprechend der (CFL)-Courant-Bedingung. Für die numerische Berechnung nach dem Euler-System werden nach Tab. 1c über das Wellenfeld ortsfeste Feldpunkte P_m mit der Koordinate $\mathbf{x_m}$ verteilt und dienen als Adressen für die Feldvariablen $\#_\mathbf{m}$ und deren Ableitungen $\#_\mathbf{m}°$ und $\nabla\#$.

Tab. 2. Finiter Iterationsschritt. Dazu werden nach Tab. 2a die Zustände $\#_m = \#_\mathbf{m}(t)$ herangezogen, die zur Zeit t an den Feldpunkten P_m anliegen. Zur Bestimmung des Gradienten $\nabla\#_\mathbf{m}$ werden jedem Feldpunkt P_m n benachbarte Feldpukte P_{mn} mit den Koordinaten $\mathbf{x_{mn}}$ und den Variablen $\#_{mn}$ zugeordnet. Der Bestimmtheit wegen ist in Tab. 2b nur ein einfaches, selbsterklärendes Rechenschema angeschrieben, auch wenn effektivere Verfahren bekannt sind: Danach werden die linearen Differenzquotienten

$$\nabla\#_{\mathbf{mn}} = (\#_{\mathbf{mn}} - \#_\mathbf{m})/(\mathbf{x_{mn}} - \mathbf{x_m}) \qquad (4)$$

zu den benachbarten Feldpunkten P_{mn} gebildet, um daraus mit einer entfernungs- und/oder richtungsabhängigen Gewichtung α_{mn} den für P_m maßgebenden Gradienten $\nabla\#_m$ zu mitteln. Im nächsten Schritt wird nach der Vorschrift von Tab. 1g der Gradienten-Tensor $\nabla\mathbf{s}$ in eine symmetrische Komponente $\nabla\mathbf{s}_{\mathbf{sym}} := \nabla\mathbf{q}$ und eine asymmetrische Komponente $\nabla\mathbf{s}_{\mathbf{asym}} := \nabla\mathbf{r}$ aufgeteilt. Nach der in Tab, 2e zugrunde gelegten Impulstheorie induziert die symmetrische Komponente $\nabla\mathbf{q}$ eine longitudinale Schnelle

$$\mathbf{q}° = \mathbf{c}_L \cdot \nabla\mathbf{q}. \qquad (5)$$

Da die Richtung der Schallgeschwindigkeit $\mathbf{c}_L$ an sich unbekannt ist, ist das Skalarprodukt $\mathbf{c}_L \cdot \nabla\mathbf{q}$ unterbestimmt. Nach der Lehre der Säkulargleichung nehmen aber die Schallgeschwindigkeit $\mathbf{c}_L$ und die Schnelle $\mathbf{q}°$ die Hauptrichtung des symmetrischen Tensors $\nabla\mathbf{q}$ an. Physikalisch entspricht dies gerade der Richtung der longitudinalen Huygens Elementarwelle. In Tab. 2f ist eine Vorschrift zur direkten Festlegung der Hauptrichtung angegeben, ohne Umweg über die Hauptwerte. Nach Tab. 2e induziert die asymmetrische Komponente $\nabla\mathbf{r}$ die transversale Schnelle

$$\mathbf{r}° = \mathbf{c}_T \cdot \nabla\mathbf{r} \equiv \mathbf{c}_T \times \mathbf{rot}\ \mathbf{r}. \qquad (6)$$

Auch hier handelt es sich um eine Säkulargleichung. Die an sich unbestimmte Richtung der transversale Wellengeschwindigkeit $\mathbf{c}_T$ ist nach Tab. 2f orthogonal den Vektoren $\mathbf{rot}\ \mathbf{r}$ und $\mathbf{r}°$. Damit sind alle Feldvariablen #(t) und deren Ableitungen #° und $\nabla\#$ zum Zeitpunkt t bekannt und man kann damit z.B. nach der einfachen, linearen Formel von Tab. 2h die longitudinale Auslenkung $\mathbf{q}(t + dt)$ und von Tab. 2i die transversale Auslenkung $\mathbf{r}(t + dt)$ an den Feldpunkten P_m zum Zeitpunkt t + dt extrapolieren.

$$\mathbf{q}(t + dt) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{q}°dt \qquad (7)$$
$$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}°dt \qquad (8)$$

Damit ist die Iteration über einen finiten Zeitschritt dt [s] abgeschlossen und dasselbe Rechenschema wird mit dem neuen Ausgangswert #(t + dt) wiederholt, usw.

Tab. **3** Spezielle Feldpunkte. Die Iterationsrechnung nach Tab. 2 bezog sich auf den Normalfall in einem kräftefreien, unbegrenzten Medium. In Tab. 3 erhalten die Feldpunkte P_m zusätzliche Eigenschaften, um damit in der Praxis vorkommende Anwendungen wiederzugeben. In Tab. 3a geht es um die Eingabe einer Belastung. Am einsichtigsten ist die Vorgabe einer Auslenkung $\mathbf{u_m}$ [m] an einem oder mehreren Feldpunkten P_m. Um geometrische Linearität zu gewährleisten muss sein $u_m << |x_m - x_{mn}|$. Der zeitliche Verlauf der Anregung ist frei wählbar, Standards sind einmaliger Impuls oder zeitliche Programmläufe. Um z.B. die spektralen Eigenwerte der untersuchten Struktur zu ermitteln, wird eine Sinus- Anregung über den interessierenden Frequenzbereich durchgestimmt. In diesem Fall dienen nach Tab. 3b alle Feldpunkte gleichzeitig zur Registrierung der Antwortfunktion. Nach Tab. 3c werden mit den Randpunkten P_m ($\mathbf{x}_m$, a_m) die Begrenzungsflächen des zu untersuchenden Bauteils festgelegt. Diese sind wieder durch die Koordinate $\mathbf{x}_m$ und zusätzlich durch den zugeordneten Flächenvektor $\mathbf{A}_m$ [m^2] bzw. die Flächennormale $\mathbf{a}_m = \mathbf{A}_m/A_m$ [-] bestimmt. Zur Kontrolle: Die Summe $\sum \underline{\mathbf{x}}_m \cdot \underline{\mathbf{A}}_m = V$ [m^3] stellt das durch die Randpunkte abgegrenzte Volumen V dar. Bei einer „harten" Berandung verschwindet die Auslenkung senkrecht zur Wand und es ist $\underline{\mathbf{a}}_m \cdot \underline{\mathbf{s}}_m° = 0$. Beim „weichen" Abschluss verschwinden die Wandkräfte nach $\mathbf{a}_m\mathbf{a}_m \cdot\cdot \nabla\underline{\mathbf{s}}_m = 0$. In Tab. 2 war die konventionelle Euler-Beschreibung unterstellt, die bei begrenzten Auslenkungen $\mathbf{s}$ ausreichende Genauigkeit gewährleistet. Um auch größere Auslenkungen und Fließvorgänge zu erfassen dient nach Tab. 3d die Lagrange-Beschreibung dazu, die ursprünglich ortsfesten Feldpunkte $\mathbf{x}$ nach der Vorschrift

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{s} \qquad (9)$$

in mitbewegte substanzfeste Feldpunkte zu überführen. Bei 2D- bzw. 1D-Objekten bleibt die Impulsgleichung erhalten und ist lediglich um eine bzw. zwei Dimensionen verkürzt.

Quellenverzeichnis.

[1] G. Seriani · S. P. Oliveira: Numerical modeling of mechanical wave propagation. La Rivista del Nuovo Cimento (2020) 43:459–514.

[2] D. A. Angus: The One-Way Wave Equation: A Full Waveform Tool for Modeling Seismic Body Wave Phenomena. Surv. Geophys (2014) 35:359 – 393.

[3] Halliburton Energy Services: Hybrid one-way and fullway wave equation migration. US-Patent Nr. 8 116 168 (2012)

[4-7] O. Bschorr, DAGA 2014 Fortschritte in der Akustik: [4] 2014. S. 80/81 Deviationswellen im Festkörper.[5] Longitudinal One-Way Wave Equation. S.1071/4. [6] Transversal One-Way Wave Equation. S. 1075/6. [7] 2021 Faktorisierte „One-Way" Wellengleichung.

[8] O. Bschorr, H.-J. Raida, One-Way Wave Equation Derived from Impedance Theorem. Acoustics 2020, 2(1), 164-170; https://doi.org/10.390/acoustics2010012

[9] O. Bschorr: Berechnung von elastischen Festkörpern. Dt. Patentschrift 10 2016 005 236.A1 (2016)

Tab. 1 Feldpunkte.

a Global-Koordinaten	$\mathbf{x} = x_1\mathbf{x}_1 + x_2\mathbf{x}_2 + x_3\mathbf{x}_3$ **[m]**	t [s] = Zeit-Koordinate
b Eigenschaften	$E = E(\mathbf{x})$, $G = G(\mathbf{x})$, $\rho = \rho(\mathbf{x})$	$c_L = \sqrt{E/\rho}$, $c_T = \sqrt{G/\rho}$
c Feldpunkte	$\mathbf{P_m(x_m, P_{mn}; \#_m, \#_m^\circ, \nabla\#_m\}}$	$\mathbf{x_m}$ = const
d Auslenkung s	$\mathbf{s = q + r}$ **[m]**	Setzung: **# = {s, q, r}**
e Komponenten von s	**q** = longitudinale Ausl.,	**r** = transversale Auslenkung.
f Ableitungen	$\partial\#/\partial\mathbf{x} = \nabla\#$ **[-]**	$\partial\#/\partial t = \#^\circ$ **[m/s]**
g Long. Komponente	$\nabla\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{q_m} + \nabla\mathbf{q_m}^T)$	$= \frac{1}{2}(\nabla\#_m + \nabla\#_m^T)$
h Trans. Komponente	$\nabla\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{r_m} - \nabla\mathbf{r_m}^T)$	$= \frac{1}{2}(\nabla\#_m - \nabla\#_m^T)$
i Spannungstensor	$\mathbf{T_L = E\,\nabla q}$	$\mathbf{T_T = G\,\nabla r}$

Tab. 2 Finiter Iterationsschritt

a Feldpunkte	$\mathbf{P_m(x_m, P_{mn}; s_m, q_m, r_m)}$	$\mathbf{P_{mn}(x_{mn}, s_{mn}, q_{mn}, r_{mn})}$	
b ∇-Operator	$\nabla\#_m \approx \Sigma\alpha_{mn}\nabla\#_{mn}/\Sigma\alpha_{mn}$	$\nabla\#_{mn} = (\#_{mn} - \#_m)/(\mathbf{x}_{mn} - \mathbf{x}_m)$	
c Trennung	$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s} + \nabla\mathbf{s}^T) := \nabla\mathbf{q}$	$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s} - \nabla\mathbf{s}^T) := \nabla\mathbf{r}$	
d Kontrolle	$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{q} - \nabla\mathbf{q}^T) \rightarrow \mathbf{0}$	$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{r} + \nabla\mathbf{r}^T) \rightarrow \mathbf{0}$	
e Säkulargleichung	$\mathbf{q}^\circ = \mathbf{c_L}\cdot\nabla\mathbf{q}$ $\mathbf{c_L} \parallel \mathbf{q}^\circ$	$\mathbf{r}^\circ = \mathbf{c_T}\cdot\nabla\mathbf{r} = \mathbf{c_T}\times \mathbf{rot\ r}$	$\mathbf{c_T} \perp \mathbf{r}^\circ, \mathbf{rot\ r}$
f Hauptrichtungen	$\mathbf{c_L}\times(\mathbf{c_L}\cdot\nabla\mathbf{q}) = \mathbf{0}$	$\mathbf{c_T}\cdot(\mathbf{c_T}\cdot\nabla\mathbf{r}) = \mathbf{0}$	
g Finiter Zeitschritt dt	$t \rightarrow t + dt$	$\#(t) \rightarrow \#(t + dt)$	
h Long. Auslenkung	$\mathbf{q}(t + dt) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{q}^\circ dt$	$\mathbf{q}^\circ = \mathbf{c_L}\cdot\nabla\mathbf{q}$	$\mathbf{c_L} \parallel \mathbf{q}^\circ$
i Trans. Auslenkung	$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}^\circ dt$	$\mathbf{r}^\circ = \mathbf{c_T} \times \mathbf{rot\ r}$	$\mathbf{c_T} \perp \mathbf{r}, \mathbf{rot\ r}$

Tab. 3 Spezielle Feldpunkte.

a Erreger-Punkt	Wegerregung: $\mathbf{u_m}(t)$	Krafterregung: $\nabla\mathbf{u_m}(t)$
b Mess-Punkt	Registrierung: $\#_m(t)$	
c Rand-Punkt	Weicher Abschluss: $\mathbf{a_m a_m}\cdot\cdot\nabla\mathbf{s_m} = \mathbf{0}$	Harter Abschluss: $\mathbf{a_m}\cdot\mathbf{s_m} = \mathbf{0}$
d Lagrange-Punkt	$\mathbf{x_m} \rightarrow \mathbf{x_m} + \mathbf{s_m}$	