Faktorisierte „One-Way"-Wellengleichungen

O. Bschorr
Daimler AG, Stuttgart

Zusammenfassung.

Die Diskussion um die „One-Way/Two-Way Wave Equation" bringt immer wieder die Zerlegung der klassischen akustischen Wellengleichung in zwei Teilgleichungen. Formalmathematisch wird dabei eine partielle Differentialgleichung (PDG) 2. Ordnung via Faktorisierung in zwei PDGs 1. Ordnung aufgeteilt. Dieses mathematische Standardverfahren ist physikalisch äquivalent der Separation einer stehenden Welle in zwei entgegengesetzt gerichtete Laufwellen. Selbst wenn bei Resonanzberechnungen nur die Lösung der Stehwelle gesucht ist, ist es mathematisch sehr viel einfacher mittels den PDGs 1. Ordnung die beiden Laufwellen zu berechnen und diese zur Stehwelle zu superponieren.

Auch bei den Gleichungen für Saiten-, Biege-, Torsions- und Moens/Korteweg-Wellen handelt es sich ebenfalls um „Two-Way Wave Equations" und es ist naheliegend, auch diese via Faktorisierung in „One-Way Wave Equations", – in PDGs. 1. Ordnung zu vereinfachen. Diese Umwandlung gilt nicht nur beim homogenen, sondern auch beim allgemeinen inhomogenen und verlustbehafteten Wellenleiter und gleichermaßen für Plan- und Kugel-Wellen.

Einleitung.

Die Wellenausbreitung in allen drei Aggregaten – Festkörper, Fluid, Gas – berechnet sich gemäß der Cauchy-Bewegungsgleichung = (PDG) 2. Ordnung. Der wirtschaftlichen Bedeutung wegen besteht trotz des hohen Entwicklungsstandes ein enormer Problemdruck. So verlangt die seismische Untersuchung geologischer Strukturen via FE- bzw. FD-Rechnung eine Auflösung mit Knoten im Giga- bis Tera-Bereich und CPU-Rechenzeiten von Tagen und Wochen. [5 S.460]. Hinzu kommt die „One/Two-Way Wave"-Problematik: Eine PDG 2. Ordnung enthält grundsätzlich 2 Lösungen. Diese Doppeldeutigkeit verursacht bei den numerischen FE/FD-Rechnungen Phantomeffekte, zu deren Ausschaltung gibt es der wirtschaftlichen Bedeutung wegen einen umfangreiche Literatur- und Patent-Stock.

Altbekannt ist die Faktorisierung von reduziblen Differentialgleichungen. [1,2] Speziell die Faktorisierung – Dekomposition, Intersektion – von partiellen Differentialgleichungen behandelt [3] und empfiehlt als umfassenden Überblick [4] mit dem im Vorwort aufgestelltem Anspruch „accessible to anyone with a background in algebra and analysis at the level of a first year graduate student".

Hier ist die Aufgabe gestellt, das Lösungsreservoir der Faktorisierung zu erweitern, vom homogenen auf den allgemeinen inhomogenen Wellenleiter. Nicht zuletzt sollen auch die bekannten PDGs 2. Ordnung der anderen, auch der nicht-akustischen Wellenarten formalmathematisch faktorisiert werden. – Unabhängig davon ist mit Zulassung einer komplexen Wellengeschwindigkeit auch der verlustbehaftete Wellenleiter erfasst.

Faktorisierung bei homogenem Wellenleiter.

Longitudinalwelle. Ausgangspunkt ist der homogene, isotrope und verlustfreie Festkörper, mit geradliniger und ohne Einschränkung der Allgemeinheit in x-Richtung verlaufender Longitudinalwelle. Deren elastische Auslenkung s = s(x,t) [m] folgt bei der Geschwindigkeit c[m/s], der Frequenz ω [rad/s] und der Wellenzahl k = ω/c [rad/m] der Gleichung

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] s\ = 0 \qquad (1)$$

und hat mit den in +x und in –x-Richtung laufenden Wellen zwei gleichwertige Lösungen

$$s = s_o\ sin\ (\omega t \pm kx) \qquad (2)$$

Diese Doppeldeutigkeit ist bei numerischen FE-problematisch und ob diesen Schwierigkeiten wurde immer wieder die Aufteilung der bekannten Wellengleichung (1) nach $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ in die beiden Laufwellen (3) und (4) vorgeschlagen. [zB.6]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] s = \left[\frac{\partial}{\partial t}\ - c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t} + c\ \frac{\partial}{\partial x}\right] s = 0 \qquad (3)(4)$$

Die Multiplikation der Teilgleichungen (3)(4) gibt

$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial t} + c\ \frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial}{\partial x} - \ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\ s = 0 \quad (5)$$

Da die Reihenfolge der Differentiationen unerheblich ist, heben sich die beiden inneren Terme

$$[-\,c\,\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial t} + c\ \frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial}{\partial x}]\ s \equiv 0 \qquad (6)$$

auf und bestätigen damit die Faktorisierung. Im Gegensatz zu Gl. (1) haben die Teilgleichungen (3) und (4) die Lösungen (7)(8) mit eindeutiger Laufrichtung

$$s^{\circ} - c\ s' = 0 \quad (3)\ \rightarrow\ s = s_o\ sin\ (\omega t - kx) \quad (7)$$

$$s^{\circ} + c\ s' = 0 \quad (4)\ \rightarrow\ s = s_o\ sin\ (\omega t + kx) \quad (8)$$

Die mathematische Faktorisierung einer PDG 2. Ordnung in zwei voneinander unabhängige PDGs 1.

Ordnung entspricht der Separation der Stehwellen-Gleichung (1) in die beiden entgegengesetzt gerichteten Laufwellen-Gleichungen (3)(4) und physikalisch dem Wechsel vom Kräfte- zum Impuls-Gleichgewicht. Um die bei doppeldeutigen FE- Rechnung auftretenden Phantom-Effekte auszuschalten wurden mit der Parabolisierung bewusst Verletzungen der Grundgleichung (1) in Kauf genommen, die Faktorisierung als Problemlösung blieb aber immer ungenutzt.

Transversalwellen. Bei Homogenität unterliegt eine Transversalwelle mit dem vektoriellen Ausschlag **s** und der Wellengeschwindigkeit **c** der Gleichung (9) Dank der Identität $\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \Delta$ folgt daraus direkt die faktorisierte Gleichung (10)

$$\mathbf{s}^{\circ\circ} - c^2\,\Delta\mathbf{s} = 0 \qquad (9)$$

$$\mathbf{s}^{\circ} - \mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad . \qquad (10)$$

Die Transversalwelle besteht nach [7] zu gleichen Teilen aus einem rotatorischen und einem deviatorischen Anteil, also $\nabla\mathbf{s} = (\nabla\mathbf{s})_{Rot} + (\nabla\mathbf{s})_{Dev} = 2(\nabla\mathbf{s})_{Rot}$. Mit der rotatorischen Komponente (11) erhält man direkt die Gleichung (12) der Transversalwelle. **U** = Einheitstensor, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{c}$.

$$(\nabla\mathbf{s})_{Rot} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{U} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{s}. \qquad (11)$$

$$\mathbf{s}^{\circ} - \mathbf{c} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (12)$$

Weitere Faktorisierungen. Wie auch in Tab. 1 ersichtlich, haben die PDGs 2. Ordnung der anderen mechanischen Wellenarten – Saiten-, Biege- und Moens/Korteweg-Wellen – dieselbe Struktur und sind bei homogenem Wellenleiter gleichermaßen faktorisierbar, ebenso die elektromagnetischen Wellengleichungen. Nicht übernommen wird, dass bei der mechanischen Wellen der asymmetrische und bei elektromagnetischen Wellen der symmetrische Tensorteil ausgeschlossen wird.

Faktorisierung bei inhomogenem Wellenleiter.

1D-Longitudinaler Wellenleiter. Vorgegeben ist ein inhomogener, isotroper 1D-Wellenleiter mit von der Koordinaten $\mathbf{x} = x\mathbf{i}$ abhängigen Dichte $\rho = \rho(\mathbf{x})$ [kg/m^3], dem longitudinalen Elastizitätsmodul $E = E(\mathbf{x})$ [Pa] und der ebenfalls ortsabhängigen, lokalen Schallgeschwindigkeit $c = c(\mathbf{x}) = \sqrt{(E/\rho)}$ [m/s]. Eine vektorielle Auslenkung $\mathbf{s} = s(\mathbf{x}, t)$ [m] unterliegt dem konventionellem 1. Cauchy-Bewegungsgesetz ($\mathbf{s}^{\circ} = \partial\mathbf{s}/\partial t$, $\mathbf{s}^{\circ\circ} = \partial^2\mathbf{s}/\partial t^2$, t [s] = Zeit)

$$\rho\mathbf{s}^{\circ\circ} - \nabla^2 Es = \mathbf{0} \qquad (13)$$

Wird in dieser PDG 2. Ordnung die Dichte nach $\rho = E/c^2$ eliminiert,

$$(E\mathbf{s})^{\circ\circ} - c^2\,\nabla^2\,(E\mathbf{s}) = \mathbf{0} \qquad (14)$$

so hat (14) mit dem Term (E**s**) als Feldvariable die analoge Struktur wie (1) und kann faktorisiert, also in die PDGs 1. Ordnung separiert werden

$$(E\mathbf{s})^{\circ} - \mathbf{c}\cdot\nabla\,(E\mathbf{s}) = 0 \qquad (15)$$

Bei der Longitudinal-Welle haben die Auslenkung **s** und die Ausbreitung **c** dieselbe Richtung und können ohne Verlust an Allgemeinheit mit $\mathbf{s} = s\,\mathbf{i}$ und $\mathbf{c} = c\,\mathbf{i}$ in Richtung der x**i**-Achse gedreht und mit auf Skalarform vereinfacht werden:

$$\frac{\partial\,Es}{\partial t} - c\,\frac{\partial\,Es}{\partial x} = 0 \qquad c = \{+c, -c\} \qquad (16)$$

Mit dem Helmholtz-Ansatz: $\partial(Es)/\partial t = i\omega\,(Es)$ und der Setzung $(Es)' = \partial(Es)/\partial x$ wird

$$i\omega\,(Es) - c\,(Es)' = 0 \;\rightarrow (\ln Es)' = -\,i\omega/c \qquad (17)$$

Nachprüfbar durch Einsetzen hat nach [8] diese Gleichung die Lösung, sic

$$Es = E_0 s_0 \exp i\omega\left(t - \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \qquad (18)$$

Daraus errechnen sich Schnelle $v = s^{\circ}$ [m/s] und der Druck $p = (Es)'$ [Pa].

$$v = i\omega/E\;\; E_0 s_0 \exp i\omega\left(t - \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \qquad (19)$$

$$p = -\,(i\omega/c)\,E_0 s_0 \exp i\omega\left(t - \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \qquad (20)$$

Die lokale Impedanz $z = p/v = E/c = \rho c$ ist rein reell, damit wird die zeitgemittelte, lokale Wellenleistung n [W/m^2] mit dem Gradient $n' = -\,n\,(\ln Ec)$ [W/m^3].

$$n = n(x) = \langle pv\rangle_t = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,(E_o s_o)^2/Ec \qquad (21)$$

Literatur.

[1] Schlesinger, L.: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner 1897. Nach [3].

[2] Kamke, E.: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1965). Nach [3].

[3] D. Grigoriev, Rennes, and F. Schwarz, Sankt Augustin: Factoring and Solving Linear Partial Differential Equations. Computing 73, (2004).

[4] van der Put, M., Singer, M.: Galois Theory of linear differential equations. Grundlehren der Mathematik - Wissenschaften. Vol. 328. Springer (2003).

[5] G. Seriani, S.P. Oliveira, Numerical modeling of mechanical wave propagation, La Rivista del Nuovo Cimento, Volume 43, Issue 9, p.459-514 (2020).

[6] Michael P. Lamoureux: The mathematics of PDEs and the wave equation. University of Calgary. Seismic Imaging Summer School. August 2006.

[7-8]. O. Bschorr: DAGA-Fortschritte der Akustik. [7] 2014: S. 80/81. [8] 2013: S. 1262/1263.

[9] L. Fishman. J. J. McCoy: A new class of propagation models based on a factorization of the Helmholtz equation. Geophys. J. R. astr. SOC. (1985) 80, 439-461.

Wellenart	**Konventionelle Wellengleichung** = PDG 2. Ordnung	**Faktorisierte Wellengleichung** = PDG 1. Ordnung	**Faktorisierte Welle** Wellenrichtung: + **i**x Transversalrichtungen: **j, k**	**Wellen-geschwindigkeit**
a. Longitudinale Welle	$s^{\circ\circ} - c^2\,\boldsymbol{\nabla^2}\,s = 0$	$s^{\circ} - \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nabla} s = 0$	$s = \mathbf{i}\, s_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{(E/\rho)}$
b. Transversale Welle	$s^{\circ\circ} - c^2\,\mathbf{rot\ rot}\ s = 0$	$s^{\circ} - \mathbf{c}_x\,\mathbf{rot}\ s = 0$	$s = \mathbf{j}\, s_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{(G/\rho)}$
c. Saitenwelle	$s^{\circ\circ} - c^2\,\mathbf{rot\ rot}\ s = 0$	$s^{\circ} - \mathbf{c}_x\,\mathbf{rot}\ s = 0$	$s = \mathbf{j}\, s_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{(T/m)}$
d. Moens/Korteweg-Welle	$s^{\circ\circ} - c^2\, s'' = 0$	$s^{\circ} - c\, s' = 0$	$s = s_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{(Eh/D\rho)}$
e. Biegewelle (Transv.)	$ms^{\circ\circ} - (EJs'')'' = 0$	$mcs^{\circ} - (EJs'')' = 0$	$s = \mathbf{j}\, s_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{\sqrt{(\omega^2 EJ/m)}}$
f. Elektromagnetische Transversal-Welle	$\mathbf{E}^{\circ\circ} - c^2\,\mathbf{rot\ rot\ E} = 0$ $\mathbf{B}^{\circ\circ} - c^2\,\mathbf{rot\ rot\ B} = 0$	$\mathbf{E}^{\circ} - \mathbf{c}_x\,\mathbf{rot\ E} = 0$ $\mathbf{B}^{\circ} - \mathbf{c}_x\,\mathbf{rot\ B} = 0$	$\mathbf{E} = \mathbf{j}\, E_0 \sin(\omega t - kx)$ $\mathbf{B} = \mathbf{k}\, B_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{(1/\mu\varepsilon)}$ $c = \sqrt{(1/\mu\varepsilon)}$
g. Longitudinale Telegraphenwelle	$LC\,U^{\circ\circ} - U'' = 0$ $LC\,I^{\circ\circ} - I'' = 0$	$U^{\circ} - c\,U' = 0$ $I^{\circ} - c\,I' = 0$	$U = U_0 \sin(\omega t - kx)$ $I = I_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{(1/LC)}$
h. Elektromagnetische Longitudinal-Welle	$\mathbf{E}^{\circ\circ} - c^2\,\boldsymbol{\nabla^2}\mathbf{E} = 0$ $\mathbf{H}^{\circ\circ} - c^2\,\boldsymbol{\nabla^2}\mathbf{H} = 0$	$\mathbf{E}^{\circ} - \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{E} = 0$ $\mathbf{H}^{\circ} - \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{H} = 0$	$\mathbf{E} = \mathbf{i}\, E_0 \sin(\omega t - kx)$ $\mathbf{H} = \mathbf{i}\, H_0 \sin(\omega t - kx)$	$c = \sqrt{(1/\mu\varepsilon)}$ $c = \sqrt{(1/\mu\varepsilon)}$

Bezeichnungen: s, (s) [m] = Vektorielle (skalare) elastische Auslenkung, $s^{\circ} = ds/dt$ [m/s] = Schnelle, $s^{\circ\circ} = d^2s/dt^2$ [m/s^2] = Beschleunigung, $()' = d()/dx$, c = {+c, -c} [m/s] = Wellengeschwindigkeit, ω [rad/s] = Kreis -Frequenz. k [rad/m] = Wellenzahl. $()_0$ [] = Amplitude. E [Pa] = Elastizitätsmodul, G [Pa] = Schubmodul. ρ [kg/m^3] = Dichte, T [N] = Zugspannung, h [m] = Rohr-Wandung, D [m] = Rohr-Durchmesser, m [kg/m] = Massenbelegung, EJ [Pa m^4] = Biegesteifigkeit. U [V] = elektrische Spannung, I [A]= Stromstärke, **E** [V/m]= elektrische Feldstärke, **H** [A/m] = magnetische Feldstärke, C [As/Vm] = längenspezifische Kapazität, L [Vs/Am] = längenspezifische Induktivität, ε [As/Vm] = Dielektrizitäts-Konstante, μ [Vs/Am] = Permeabilitäts-Konstante.

Tab. 1. Formal-mathematische Faktorisierung von partiellen Differential-Wellengleichungen (PDG) 2. Ordnung in PDG´s 1. Ordnung für einen homogenen Wellenleiter. Wellenmechanisch entspricht die Faktorisierung der Aufspaltung einer Stehwelle in 2 komplementäre, entgegensetzt gerichtete Laufwellen. (Wiedergegeben ist jeweils nur die in +x**i**-Richtung laufende Welle). Bei der elektromagnetischen Longitudinal-Welle h handelt es sich um die Erweiterung der longitudinalen Telegraphen-Welle g.