Alternative für Voigtsche Notation.

O. Bschorr

Daimler AG, Stuttgart

Zusammenfassung

In einem anisotropen, linear-elastischen Festkörper haben die 3x3-Spannungs- und Verzerrungs-Tensoren drei orthogonale Hauptachsen, bestimmbar via Säkular-Gleichung. Mit auf diese Achsen ausgerichteten Haupt-Koordinaten reduziert sich ohne Verlust an Allgemeinheit der aus sechs Komponenten bestehende symmetrische Tensor-Teil auf drei Diagonalglieder. Diese bestimmen das longitudinale Wellenfeld, so wie analog dazu die drei Seitenglieder des asymmetrischen Tensor-Teils für das transversale Wellenverhalten maßgebend sind. Danach liegen die Slowness-Vektoren auf Ellipsoiden. Erwartungsgemäß nähern sich diese mit abnehmender Anisotropie der Kugelform.

Einleitung. Aufgabenstellung

Im Wettstreit zur Priorität des Elastizitätsgesetzes brachte Hooke 1675 das Anagramm ceiiinosssttuv und drei Jahre später die Auflösung: Ut tensio, sic vis. Frei übersetzt: Verformung und Spannung sind proportional. Beim 1D-Zustab fungiert der skalare Elastizitätsmodul als Proportionalitätsfaktor. Beim anisotropen 3D-Festkörper verbindet Voigt [1] den Verformungs- **S** [-] und den Spannungs-Tensor **T** [Pa] durch eine Elastizitäts-Tetrade mit insgesamt 81 Koeffizienten. Voigt kommt aus der Kristallphysik, sein gleichnamiges, 1910 erschienenes Lehrbuch ist auch heute noch Standard und identifiziert 32 Kristallklassen. Es gelang ihm, über die innere Symmetrien die verschiedenen Klassen nachzubilden, qualitativ nicht aber quantitativ. Ein solcher Zugang ist für technische Belange weniger geeignet.

Die Voigtsche Theorie macht keinen Gebrauch von zwei wesentlichen Tensor-Dispositionen: (i) Jeder 3x3-Tensor hat drei orthogonale Hauptachsen, dies gilt auch für jede noch so komplizierte Anisotropie. (ii) Alle anisotropen Festkörper –auch die 32 verschiedenen Kristallklassen – haben nach Stokes nur drei irreduzible Verformungsarten # ={Dil, Rot, Dev}: Die Dilatation (Dil) umfasst die Volumenänderung, die Rotation (Rot) die Lagedrehung und die Deviation (Dev) die Gestaltsänderung. Diese Komponenten sind wechselseitig orthogonal und können so getrennt behandelt werden. Mathematisch entspricht Dil dem skalaren div-, Rot dem vektoriellen **rot-** und Dev dem dyadische **dev-**Operator. Dabei ist die Dilatation durch 1, die Rotation durch 3 und die Deviation durch 5 Kennzahlen bestimmt, was mit 1+3+5=9 den 3x3=9 Koeffizienten der **S-** und **T**-Tensoren entspricht.

Nicht zuletzt hat Voigt dem Boltzmann-Theorem folgend nur die symmetrischen Verformungs- und Spannungstensoren zugelassen und die antisymmetrischen Terme a priori ausgeschlossen. Dafür musste er die stringente Tensor-Mathematik aufgeben und mit der Aufnahme ungelegenen Extra-Notationen auf deren innere Logik verzichten. Eine kompakte Darstellung der Voigtschen Theorie findet sich bei Altenbach. [2].

Ziel ist eine Alterative zur Voigtschen Theorie. In der Vorgängerarbeit [5] konnte dazu die Longitudinalwelle auf die symmetrische Tensor-Komponente zurückgeführt werden. Hier soll der bei Voigt a priori ausgeschlossene asymmetrische Tensor-Teil zur Beschreibung der Transversalwelle einbezogen werden.

Der Einfachheit und Bestimmtheit wegen sei der anisotrope Festkörper homogen, verlustfrei und allseitig unbegrenzt¸ so dass alleinig querdehnungsfreie Raumwellen bestehen und Oberflächeneffekte ausgeschlossen sind. Zum Anfang dienen beliebig orientierte kartesische Hilfs-Koordinaten $\underline{\mathbf{x}}$ = [x$\underline{\mathbf{i}}$, y$\underline{\mathbf{j}}$, z$\underline{\mathbf{k}}$} dazu, um via Säkular-Gleichung die 3 orthogonalen, vom deviatorischen Elastizitätsmodul abhängigen Haupt-Achsen zu bestimmen und diese zu den ausgezeichneten Haupt-Koordinaten **x** = [x**i**, y**j**, z**k**} zu machen. Da beide Systeme $\underline{\mathbf{x}}$ und **x** nur gegeneinander verdreht sind, liefern sie gleiche Ergebnisse, das Hauptachsen-System **x** jedoch ist rechentechnisch sehr viel einfacher und transparenter. Um auch gekrümmte Wellenwege zu beschreiben, werden zu den Global-Koordinaten **x** zusätzlich die in einem Feldpunkt $\Theta = \Theta(\mathbf{x})$ fixierten lokalen Koordinaten des begleitenden Dreibeins {ξ**t**,**n.b**} eingeführt, mit der einsnormierten Wellenrichtung **t** [-].–Vektoren und Tensoren sind durch Fettdruck markiert. **a**·**b**, **a**x**b** und **ab** sind skalares, vektorielles und dyadisches Produkt der Vektoren **a** und **b**. Übernommen wird die Vereinbarung **ab**··**cd** = **a**·**c** **b**·**d**, diese gewährleitet Kommutativität und macht Rechts- und Links-Multiplikationen obsolet.

Verformung.

Um die Vorteile der linearen Theorie mit Superposition und Orthogonalität nutzen zu können und um die diffizile Unterscheidung von Euler- und Lagrange-Beschreibung zu vermeiden, werden nur kleine – stringenter: infinitesimale - elastische Auslenkungen $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x},t)$ [m]

$$\mathbf{s} = s_x\,\mathbf{i} + s_y\,\mathbf{j} + s_z\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

und mit m, n = {x, y, z} und **m, n** = {**i**, **j**, **k**} und der Schreibweise $s_{m,n} = \partial s_m/\partial x_n$ der für die lineare Verformung relevante, aus 9 unabhängigen Komponenten bestehende Tensor $\nabla\mathbf{s}$ [-] bzw. der zugeordneten Matrix S [-] zugelassen.

$$\nabla\mathbf{s} = \begin{matrix} s_{x,x}\,\mathbf{ii} & s_{x,y}\,\mathbf{ij} & s_{x,z}\,\mathbf{ik} \\ s_{y,x}\,\mathbf{ji} & s_{y,y}\,\mathbf{jj} & s_{y,z}\,\mathbf{jk} \\ s_{z,x}\,\mathbf{ki} & s_{z,y}\,\mathbf{kj} & s_{z,z}\,\mathbf{kk} \end{matrix} \rightarrow S = \begin{matrix} s_{x,x} & s_{x,y} & s_{x,z} \\ s_{y,x} & s_{y,y} & s_{y,z} \\ s_{z,x} & s_{z,y} & s_{z,z} \end{matrix} \qquad (2)$$

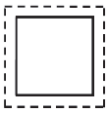
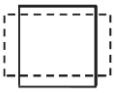
Nach der Helmholtz zugeschriebener, aber auf Stokes 1845 zurückgehender Feststellung lässt sich jede infinitesimale Verformung als Summe einer Dehnung, einer Rotation und einer Deformation darstellen. So besteht – wie bei allen 3x3-Tensoren – auch $\nabla\mathbf{s}$ aus 3 irreduziblen Komponenten, einer dilatorischen $(\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Dil}}$, einer rotatorischen $(\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Dil}}$ und einer deviatorischen. $(\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Dil}}$ [2, 3]. **U** = **ii**+**jj**+**kk** = Einheits-Tensor)

$$\nabla\mathbf{s} = (\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Dil}} + (\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Rot}} + (\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Dev}} \qquad (3)$$

$$(\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Dil}} = \tfrac{1}{3}\,\mathbf{U}\,\mathbf{div}\,\mathbf{s} \qquad (\nabla\mathbf{s})_{\mathbf{Rot}} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{U}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{s} \qquad (4)$$

$$\nabla\mathbf{s}_{\mathbf{Dev}} = \mathbf{dev}\,\mathbf{s} = \nabla\mathbf{s}_{\mathbf{sym}} - \nabla\mathbf{s}_{\mathbf{Dil}} = \nabla\mathbf{s}_{\mathbf{sym}} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{U}\,\mathbf{div}\,\mathbf{s} \qquad (5)$$

Dil: Die form- und winkeltreue Dilatation geht auf den skalaren div-Operator zurück und ist als Kugel-Tensor durch eine Kennzahl festgelegt. Eine div-Störung breitet sich in einem elastischen Kontinuum als Longitudinalwelle aus.
Rot: Der volumen- und formtreue Rotations-Tensor $\nabla \mathbf{s}_{Rot} = \nabla \mathbf{s}_{asym}$ ist schiefsymmetrisch, ist durch den vektoriellen **rot**-Operator festgelegt und hat 3 Kennzahlen. Wahlweise sind dies die drei Vektor-Komponenten oder der Betrag **rot s** und zwei Winkelwerte zur räumlichen Festlegung. Eine **rot**-Störung breites sich als Transversalwelle aus.
Dev: Der volumen- und richtungstreue Deviator $\nabla \mathbf{s}_{Dev}$ = **dev s** ist spurlos, leitet sich von dem fünf-komponentigen dyadischen **dev**-Operator ab und stellt eine Quadrupol dar. Eine **dev**-Störung verursacht eine Oberflächenwelle.
Den in Tab.1b skizzierten Verformungsarten # ={Dil, Rot, Dev}wird je ein Elastizitätsmodul $E_{\#}$ und damit in linearer Näherung der Spannungstensor $\mathbf{T}_{\#} = E_{\#} \nabla \mathbf{s}_{\#}$ [Pa] und die Volumenkraft $\mathbf{f}_{\#}$=div $\mathbf{T}_{\#} = E_{\#} \Delta \mathbf{s}_{\#}$. [N/m^3] zugeordnet.

	a. Dilatation (Dil)	**Rotation (Rot)**	**Deviation(Dev)**
b.			
c.	**Volumen-Änderung**	**Richtungs-Änd.**	**Gestalts-Änd.**
d.	**Monopol**	**Dipol**	**Quadrupol**
e.	**div s = Skalar**	**rot s = Vektor**	**dev s = Tensor**
f.	$\mathbf{s}_{Dil} = \nabla\Phi$ für $\Delta\Phi \neq 0$	$\mathbf{s}_{Rot}$ = **rot A**	$\mathbf{s}_{Dev} = \nabla\Phi$ // $\Delta\Phi = 0$
g.	$\nabla \mathbf{s}_{Dil} = \frac{1}{3}$ **U div s**	$\nabla \mathbf{s}_{Rot} = -\frac{1}{2}$**U x rot s**	$\nabla \mathbf{s}_{Dev}$ = **dev s**
h.	$\Delta \mathbf{s}_{Dil} = \frac{1}{3}$ **grad div s**	$\Delta \mathbf{s}_{Rot} = \frac{1}{2}$**rot rot s**	$\Delta \mathbf{s}_{Dev} = \Delta\nabla\Phi = \mathbf{0}$
i.	$\mathbf{E}_{Dil} = K$ **[Pa]**	$\mathbf{E}_{Rot} = G$ **[Pa]**	$\mathbf{E}_{Dev} = G$ **[Pa]**
k.	**div** $\mathbf{s}_{Dil}$ **= div s**	**rot** $\mathbf{s}_{Rot}$ **= rot s**	**dev** $\mathbf{s}_{Dev}$ **= dev s**
l.	**rot** $\mathbf{s}_{Dil} = \mathbf{0}$	**dev** $\mathbf{s}_{Ror} = \mathbf{0}$	**div** $\mathbf{s}_{Dev} = \mathbf{0}$
m.	**dev** $\mathbf{s}_{Dil} = \mathbf{0}$	**div** $\mathbf{s}_{Ror} = \mathbf{0}$	**rot** $\mathbf{s}_{Dev} = \mathbf{0}$

Tab. 1. Reduktion des linearen elastischen Auslenkungsvektors **s** und des 3x3- Tensors $\nabla \mathbf{s}$ auf die 3 orthogonalen, irreduziblen Verformungstypen Dilatation (Dil), Rotation (Rot) und Deviation (Dev). Die Zeilen k, l und m beschreiben deren wechselseitige Orthogonalität. [7].

Nicht nur die Gradienten-Dyade $\nabla \mathbf{s}$, sondern alle 3x3-Tensoren $\mathbf{V} = \{\nabla \mathbf{s}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{E}\}$ sind auf die #, #* = {Dil, Rot, Dev}-Komponenten reduzierbar und haben beim Doppelskalar-Produkt die Orthogonalität (8).

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{Dil} + \mathbf{V}_{Rot} + \mathbf{V}_{Dev} \quad (6)$$
$$\mathbf{V}_{Dil} = \tfrac{1}{3}\mathbf{U}\mathbf{U}\cdot\cdot\mathbf{V} = \mathrm{sp}\{\mathbf{V}\}\,\mathbf{U} \quad (7)$$
$$\mathbf{V}_{Rot} = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_{asym} = \tfrac{1}{2}\mathbf{U}\mathrm{x}\mathbf{V} \qquad \mathbf{V}_{Dev} = \mathbf{V}_{Sym} - \mathbf{V}_{Dil}$$

$$\mathbf{V}_{\#^*}\cdot\cdot\mathbf{V}_{\#} = \mathbf{0} \qquad \text{für } \#^* \neq \# \quad (8)$$

Elastizitäts-Tensor.

Aufgabe ist die Bestimmung der elastischen Eigenschaften eines unbekannten, anisotropen Festkörpers. Wenn dessen Hauptachsen unsicher/unbekannt sind, wird von einer würfelförmigen Materialprobe (Fig.1) ausgegangen. Deren Würfelkanten spannen die kartesischen Erst-Koordinaten $\underline{\mathbf{x}} = [x\underline{\mathbf{i}}, y\underline{\mathbf{j}}, z\underline{\mathbf{k}}]$ auf. An dem Würfel lassen sich maximal neun voneinander unabhängige, lineare Kraft/Weg-Messungen durchführen. Messgrößen sind die elastischen Verformungen $s_{m,n}$ $\underline{\mathbf{mn}}$ [-] und die Spannungen σ_{mn} $\underline{\mathbf{mn}}$ [Pa] an einer Würfelfläche mit der Flächen-Normalen $\underline{\mathbf{m}} = \{\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}}\}$ und in der Kraft-Richtung $\underline{\mathbf{n}} = \{\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}}\}$. Die Kausalität verlangt, dass eine tensorielle $s_{m,n}$ $\underline{\mathbf{mn}}$-Verformung eine σ_{mn} $\underline{\mathbf{mn}}$-Spannung bedingt, und umgekehrt. Das skalare Verhältnis von Spannung σ_{mn} und Dehnung $s_{m,n} = \partial s_m / \partial x_n$ gibt den richtungsspezifischen Elastizitätsmodul

$$\underline{E}_{mn} = \sigma_{mn} / s_{m,n} \quad (10)$$

Diese aus den 9 Messungen gewonnenen $\underline{E}_{mn}$ Komponenten bilden den Elastizitäts-Tensor $\underline{\mathbf{E}}$, bzw. die -Matrix $\underline{E}$ (11)

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{matrix} \underline{E}_{xx}\,\underline{\mathbf{ii}} & \underline{E}_{xy}\,\underline{\mathbf{ij}} & \underline{E}_{xz}\,\underline{\mathbf{ik}} \\ \underline{E}_{yx}\,\underline{\mathbf{ji}} & \underline{E}_{yy}\,\underline{\mathbf{jj}} & \underline{E}_{yz}\,\underline{\mathbf{jk}} \\ \underline{E}_{zx}\,\underline{\mathbf{ki}} & \underline{E}_{zy}\,\underline{\mathbf{kj}} & \underline{E}_{zz}\,\underline{\mathbf{kk}} \end{matrix} \rightarrow \underline{E} = \begin{matrix} \underline{E}_{xx} & \underline{E}_{xy} & \underline{E}_{xz} \\ \underline{E}_{yx} & \underline{E}_{yy} & \underline{E}_{yz} \\ \underline{E}_{zx} & \underline{E}_{zy} & \underline{E}_{zz} \end{matrix}$$

Nach der Voigtschen Theorie kann jede der 9 Gradienten-Komponenten $s_{m,n}$ mit jeder der 9 Spannungen σ_{mn} korrespondieren und kommt so auf 9 mal 9 = 81 Koeffizienten!

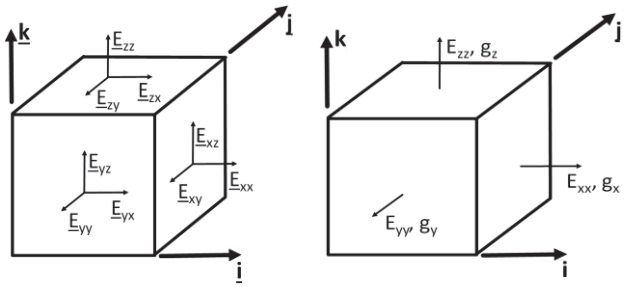


Fig. 1. Würfelförmige anisotrope Materialprobe ohne Kenntnis der Hauptachsen in den vorläufigen Koordinaten $\underline{\mathbf{x}} = [x\underline{\mathbf{i}}, y\underline{\mathbf{j}}, z\underline{\mathbf{k}}]$. Mit diesem Modell bestehen an 3 Würfelflächen in je 3 Richtungen 9 unabhängigen Spannungs/Verformungs-Messungen und liefern insgesamt 3 mal 3 = 9 Elastizitäts-Koeffizienten $E_{mn} = \sigma_{mn} / s_{m,n}$.
Fig. 2. Würfelförmige anisotrope Materialprobe in den Haupt-Koordinaten $\mathbf{x} = [x\mathbf{i}, y\underline{\mathbf{j}}, z\mathbf{k}]$. In diesem, auf die natürlichen Hauptachsen ausgerichtetem System ist der symmetrische Teil des Elastizitäts-Tensor (-Matrix) durch die 3 Diagonal-Module E_{xx}, E_{yy}, E_{zz} und der antisymmetrische nach $\mathbf{E}_{Asym} = \mathbf{G} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{g}\,\mathbf{x}\,\mathbf{U}$ durch die Vektor-Invariante $\mathbf{g} = \{E_{yz}\,\mathbf{i} + E_{zx}\,\mathbf{j} + E_{xy}\,\mathbf{k}\}$ bestimmt.

Der 3x3-Tensor $\underline{\mathbf{E}}$ [Pa] liefert zusammen mit der Transponierten $\underline{\mathbf{E}}^{\mathbf{T}}$ eine symmetrische $\mathbf{E}_{Sym}$ und eine antisymmetrische $\mathbf{E}_{Asym}$ Komponente.

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_{Sym} + \underline{\mathbf{E}}_{Asym} \quad (12)$$
$$\underline{\mathbf{E}}_{Asym} = \tfrac{1}{2}\{\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}}^{\mathbf{T}}\} = \mathbf{E}_{Rot} \quad (13)$$
$$\underline{\mathbf{E}}_{Sym} = \tfrac{1}{2}\{\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{E}}^{\mathbf{T}}\} = \underline{\mathbf{E}}_{Div} + \underline{\mathbf{E}}_{Dev} \quad (14)$$

Die symmetrische Dyade $\underline{\mathbf{E}}_{Sym}$ mit 6 Kenngrößen (15)

$$\underline{\mathbf{E}}_{Sym} = \begin{matrix} \underline{E}_{xx}\,\underline{\mathbf{ii}} & \tfrac{1}{2}(\underline{E}_{xy}+\underline{E}_{yx})\underline{\mathbf{ij}} & \tfrac{1}{2}(\underline{E}_{xz}+\underline{E}_{zx})\underline{\mathbf{ik}} \\ \tfrac{1}{2}(\underline{E}_{yx}+\underline{E}_{xy})\underline{\mathbf{ji}} & \underline{E}_{yy}\underline{\mathbf{jj}} & \tfrac{1}{2}(\underline{E}_{yz}+\underline{E}_{zy})\underline{\mathbf{jk}} \\ \tfrac{1}{2}(\underline{E}_{zx}+\underline{E}_{xz})\,\underline{\mathbf{ki}} & \tfrac{1}{2}(\underline{E}_{zy}+\underline{E}_{yz})\underline{\mathbf{kj}} & \underline{E}_{zz}\,\underline{\mathbf{kk}} \end{matrix}$$

lässt sich ohne Verlust an Allgemeinheit über die klassische Säkular-Gleichung $\det(\underline{\mathbf{E}}_{Sym} - \mathrm{E}\mathbf{U}) = \mathbf{0}$ über die kubische Gleichung (16) und den säkularen Konstanten $I_{1,2,3}$

$$E^3 + I_1E^2 + I_2E + I_3 = 0 \quad (16)$$
$$I_1 = \underline{E}_{xx} + \underline{E}_{yy} + \underline{E}_{zz} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,\{\underline{E}_{Sym}\} \quad (17)$$
$$I_2 = \tfrac{1}{2}[I_1^2(\underline{E}_{Sym}) - I_1(\underline{E}_{Sym}^2)] \qquad I_3 = \det\{\underline{E}_{Sym}\} \quad (18, 19)$$

auf die 3 wesentlichen Kenngrößen $E_{sym} = \{E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}\}$ bringen. [zB. 2] und man erhält den Diagonal-Tensor $\mathbf{E}_{Sym}$ in den Haupt-Koordinaten (*)

$$\mathbf{E}_{Sym} = \begin{matrix} E_{xx}\,\mathbf{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{yy}\,\mathbf{jj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{zz}\mathbf{kk} \end{matrix} = E_{xx}\,\mathbf{ii} + E_{yy}\,\mathbf{jj} + E_{zz}\,\mathbf{kk} \qquad (20)$$

Die Säkular-Umformung selbst verursacht keine physikalische Veränderung und beschreibt lediglich die Drehung des in $\underline{\mathbf{x}}$ Koordinaten gegebenen symmetrischen Tensor $\underline{\mathbf{E}}_{Sym}$ auf den in den Haupt-Koordinaten $\mathbf{x}$ gegebenen Diagonal-Tensor $\mathbf{E}_{Sym}$, entsprechend dem Dreh-Dyade $\mathbf{D}$ (22)

$$\mathbf{E}_{Sym} = \mathbf{D}\cdot\underline{\mathbf{E}}_{Sym} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{E}_{Sym}\cdot\underline{\mathbf{E}}_{Sym}^{-1} \qquad (21, 22)$$

Wird $\mathbf{D}$ auf den in den Hilf-Koordinaten $\underline{\mathbf{x}} = [x\underline{\mathbf{i}}, y\underline{\mathbf{j}}, z\underline{\mathbf{k}}\}$ gemessenen Tensor $\underline{\mathbf{E}}$ (11) angewandt, so ergibt sich der in den Haupt-Koordinaten $\mathbf{x} = [x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}\}$ maßgebende Elastizitäts-Tensor $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}\cdot\underline{\mathbf{E}} = \begin{matrix} E_{xx}\,\mathbf{ii} & E_{xy}\,\mathbf{ij} & E_{xz}\,\mathbf{ik} \\ -E_{xy}\,\mathbf{ji} & E_{yy}\,\mathbf{jj} & E_{yz}\,\mathbf{jk} \\ -E_{xz}\,\mathbf{ki} & -E_{yz}\,\mathbf{kj} & E_{zz}\,\mathbf{kk} \end{matrix} \qquad (23)$$

Die Diagonal-Glieder entsprechen erwartungsgemäß dem Diagonal-Tensor $\mathbf{E}_{Sym}$. (20). Die Seiten-Glieder $E_{mn} = -E_{nm}$ mit $m \neq n$ beschreiben den asymmetrischen, transversalen Elastizitäts-Tensor $\underline{\mathbf{E}}_{Asym}$.

$$\mathbf{E}_{Asym} = \begin{matrix} \mathbf{0} & E_{xy}\,\mathbf{ij} & E_{xz}\,\mathbf{ik} \\ -E_{xy}\,\mathbf{ji} & \mathbf{0} & E_{yz}\,\mathbf{jk} \\ -E_{xz}\,\mathbf{ki} & -E_{yz}\,\mathbf{kj} & \mathbf{0} \end{matrix} \qquad (24)$$

Mit der Vektor-Invariante $\mathbf{g}$ [Pa] von $\underline{\mathbf{E}}_{Esym}$

$$\mathbf{g} = E_{yz}\,\mathbf{i} + E_{xz}\,\mathbf{j} + E_{xy}\,\mathbf{k} \qquad (25)$$

erhält man die im Weiteren zweckmäßigere Schreibweise

$$\underline{\mathbf{E}}_{Asym} = -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{g}\times\mathbf{U} \qquad (26)$$

(*) Dank seiner Kugel-Form bleibt der dilatorische Tensor

$$\underline{\mathbf{E}}_{Div} = \mathbf{E}_{Div} = \text{Spur}\,\{\underline{\mathbf{E}}_{Div}\}\,\mathbf{U} = \text{Spur}\,\{\mathbf{E}_{Div}\}\,\mathbf{U} \qquad (27)$$

bei einer Drehung $\mathbf{D}$ unverändert und kann nach

$$\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}}_{Div} = \underline{\mathbf{E}}_{Dev} \qquad (28)$$

herausgenommen werden. Die Diagonalisierung des spurlosen Deviators $\underline{\mathbf{E}}_{Dev}$ anstelle von $\mathbf{E}$ vereinfacht sich wegen $I_1 = 3\,\text{Spur}\{\underline{\mathbf{E}}_{Dev}\} = 0$ auf die reduzierte Kubik-Gleichung

$$E^3 + I_2 E + I_3 = 0 \qquad (29)$$

Wesentlich ist, dass allein der Deviator $\underline{\mathbf{E}}_{Dev}$ die 3 orthogonalen Hauptachsen des anisotropen Festkörpers bestimmt. -

---

Die nach Fig. 1 in den Hilfs-Koordinaten $\underline{\mathbf{x}}$ durchgeführten Kraft/Weg-Messungen können direkt auf den in Fig. 2 in den Haupt-Koordinaten $\mathbf{x} = [x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}]$ gegebenen Materialwürfel übertragen werden. Messgrößen sind wieder die Verformungen $s_{m,n}\mathbf{mn}$ [-] und die zugehörigen Spannungen σ_{mn} $\mathbf{mn}$ [Pa] an einer Würfelfläche mit der Flächen-Normalen $\mathbf{m} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ und in den Kraft-Richtungen $\mathbf{n} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Auch hier verlangt der Kausalität gemäß eine tensorielle $s_{m,n}\mathbf{mn}$-Verformung eine σ_{mn} $\mathbf{mn}$-Spannung und umgekehrt. Das skalare Verhältnis von Spannung σ_{mn} und Dehnung $s_{m,n} = \partial s_m/\partial x_n$ gibt den richtungsspezifischen Elastizitätsmodul $E_{mn} = \sigma_{mn}/s_{m,n}$. Die Umformung

$$\sigma_{mn} = E_{mn}\,s_{m,n} \qquad (30)$$

stellt die Hooke´sche Proportionalität in Komponenten-Form dar. Mit den Matrizen $S = \{s_{m,n}\} = \{\partial s_m/\partial x_n\}$, $E = \{E_{mn}\}$ und $T = \{\sigma_{mn}\}$ und der Hadamard-Multiplikation $E\cdot\cdot S$ gilt die Matrizen-Schreibweise:

$$T = E\cdot\cdot S \qquad (31)$$

Longitudinalwellen

Zur Beschreibung einer Wellenbewegung im anisotropen Festkörper werden zusätzlich die im betrachteten Feldpunkt $\Theta = \Theta(\mathbf{x})$ fixierten, begleitenden Dreibein-Koordinaten $\{\xi\mathbf{t},\mathbf{n}.\mathbf{b}\}$ [m] eingeführt. $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ und $\mathbf{b}$ sind einsnormiert: $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$ und sind wechselseitig orthogonal: $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{t} = 0$. Dabei zeigt der Tangentenvektor $\mathbf{t}$ [-] in die lokale Wellenrichtung $\mathbf{c} = c\mathbf{t}$ [m/s]. Die Normale $\mathbf{n}$ hat die Richtung der lokalen Bahnkrümmung $\mathbf{R}^{-1}$ [rad/m] und die Binormale $\mathbf{b}$ ist senkrecht zu $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$.

$$\mathbf{t} = \mathbf{c}/c \qquad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t} \qquad (32, 33)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}^{-1}R \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n} \qquad (34, 35)$$

Eine Longitudinalwelle der (Kreis) Frequenz ω [rad/s], der Wellenzahk k [rad/m] und der Wellengeschwindigkeit $c = \omega/k$ [m/s] hat in den Dreibein-Koordinaten die Auslenkung $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\xi,t)$ (36) und den Gradienten $\nabla\mathbf{s}$ (37)

$$\mathbf{s} = a\,\mathbf{t}\sin(\omega t - k\xi) \;\rightarrow \qquad (36)$$
$$\nabla\mathbf{s} = ak\,\mathbf{tt}\cos(\omega t - k\xi) \qquad (37)$$

Die Longitudinalwelle in Richtung $\mathbf{tt}$ setzt sich entsprechend [6] aus einem dilatorischen $\frac{1}{3}[\mathbf{tt} + \mathbf{nn} + \mathbf{bb}]$ und einem deviatorischen Anteil $\frac{1}{3}[2\mathbf{tt} - \mathbf{nn} - \mathbf{bb}]$ so zusammen, dass sich entsprechend der vorausgesetzten allseitig unbegrenzten Ausdehnung sich die Querdehnungen $\mathbf{nn}$ und $\mathbf{bb}$ gerade aufheben.

$$\frac{\nabla\mathbf{s}}{ak\cos(\omega t - k\xi)} = \mathbf{tt} = \tfrac{1}{3}[\mathbf{tt} + \mathbf{nn} + \mathbf{bb}] + \tfrac{1}{3}[2\mathbf{tt} - \mathbf{nn} - \mathbf{bb}] \quad (37')$$

Ausgangspunkt ist der via Säkular-Gleichung gewonnene, diagonale Elastizitäts-Tensor

$$\mathbf{E}_{sym} = E_{xx}\,\mathbf{ii} + E_{yy}\,\mathbf{jj} + E_{zz}\,\mathbf{kk} \qquad (20)$$

In Richtung des Wellen-Vektors **t** besteht der skalare Elastizitätsmodul E(**t**)

$$E(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{tt} = E_{xx}\,(\mathbf{i}\cdot\mathbf{t})^2 + E_{yy}\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{t})^2 + E_{zz}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{t})^2 \quad (38)$$

Der in **i**-Richtung wirkende Elastizitätsmodul E_{xx} gibt zusammen mit der Dichte ρ [kg/m^3] die longitudinale Wellengeschwindigkeit c_x. Dasselbe gilt für die beiden anderen Hauptrichtungen c_y und c_z:

$$c_x = \sqrt{(E_{xx}/\rho)} \qquad c_y = \sqrt{(E_{yy}/\rho)} \qquad c_z = \sqrt{(E_{zz}/\rho)} \quad (39)$$

und man erhält damit die richtungsabhängige Wellengeschwindigkeit $c(\mathbf{t}) = \sqrt{(E(\mathbf{t})/\rho)}$

$$c(\mathbf{t}) = [E(\mathbf{t})/\rho]^{1/2} = [c_x^2\,(\mathbf{i}\cdot\mathbf{t})^2 + c_y^2\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{t})^2 + E_z^2\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{t})^2]^{1/2} \quad (40)$$

Für $\mathbf{t} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ist die Krümmung $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t} = 0$ und bestätigt die eingangs postulierte geradlinige Wellenausbreitung in den Hauptachsen.

Die Skalarprodukte **i·t , j·t, k·t** in (40) sind die bekannten Richtungskosinuse des Vektors **t** gegenüber den ortsfesten Achsen **i, j** und **k** und erfüllen mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ die Identitäten

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{t} = \cos\alpha = x/r \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{t} = \cos\beta = y/r \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{t} = \cos\gamma = z/r \quad (41)$$

Damit schreibt sich die Wellengeschwindigkeit $c = c(\mathbf{t})$ als Funktion der Koordinaten x, y, z.

$$c^2 = c_x^2\,(x/r)^2 + c_y^2\,(y/r)^2 + c_z^2\,(z/r)^2 \quad (42)$$

Führt man anstelle der Wellengeschwindigkeiten c und c_{xyz} deren Reziprokwerte - die Slowness $1/c = c^{-1}$ und $1/c_{xyz} = c_{xyz}^{-1}$ - als Feldparameter ein, so wird

$$1 \equiv (cr)^{-2}\,[(x/c_x^{-1})^2 + (y/c_y^{-1})^2 + (z/c_z^{-1})^2 \quad (43)$$

und man erkennt die bekannte Ellipsoid-Gleichung mit den 3 reziproken Hauptgeschwindigkeiten – den Slowness-Parametern c_x^{-1}, c_y^{-1}, c_z^{-1} als Ellipsoiden-Achsen. (Fig. 3). Die richtungsabhängige Wellengeschwindigkeit stellt eine sterische Inhomogenität dar. Analog einer räumlichen Inhomogenität verursacht diese eine Strahlenkrümmung in Richtung der kleinsten Wellengeschwindigkeit.

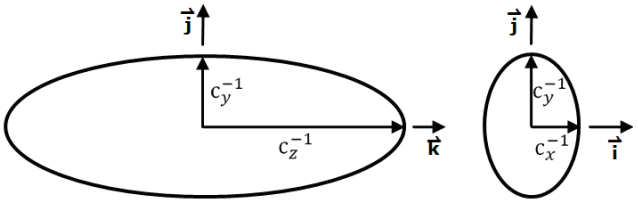


Fig. 3 Slowness-Ellipsoid. In einem anisotropen Kontinuum liegt die von der Richtung abhängige reziproke Longitudinalwellen-Geschwindigkeit 1/c – die slowness –auf einem Ellipsoid mit den 3 Hauptachsen $1/c_x$. $1/c_y$ und $1/c_z$. Entsprechend der Vereinbarung mit $E_{xx} \geq E_{yy} \geq E_{zz.}$ ist $1/c_z \geq 1/c_y \geq 1/c_x$.

Demgegenüber sind die nach dem Voigt-Formalismus berechneten Slowness-Raumflächen sehr viel komplizierter. [4] In Richtung der Hauptachsen können beide Verfahren zur Deckung gebracht werden, nicht aber in den Zwischenbereichen. Insofern bietet sich eine Slowness-Vermessung als Experimentum crucis an.

Transversalwelle

Die in **t**-Richtung laufende Transversalwelle (44) besteht hälftig aus Rotation ½ [**nt** – **tn**] und Deviation ½ [**nt** + **tn**]

$$\mathbf{s} = a\,\mathbf{n}\sin(\omega t - k\xi) \qquad \nabla\mathbf{s} = ak\,\mathbf{nt}\cos(\omega t - k\xi) \quad (44)(45)$$

$$\frac{\nabla\mathbf{s}}{ak\cos(\omega t - k\xi)} = \mathbf{nt} = \tfrac{1}{2}\,[\mathbf{nt} - \mathbf{tn}] + \tfrac{1}{2}\,[\mathbf{nt} + \mathbf{tn}] \quad (45')$$

Ausgangspunkt ist der asymmetrische Elastizitäts-Tensor $\mathbf{E}_{\mathbf{Asym}}$ für den hier der Konvention und der Einfachheit entsprechend der Schermodul $\mathbf{E}_{\mathbf{Asym}} \equiv \mathbf{G}$ eingeführt wird. Mit der Vektor-Invarianten **g** (25) ergibt sich die hier zweckmäßigere Schreibweise für den Schermodul **G**

$$\mathbf{G} = \mathbf{g} \times \mathbf{U} = (E_{yz}\,\mathbf{i} + E_{zx}\,\mathbf{j} + E_{xy}\,\mathbf{k}) \times \mathbf{U} \quad (46)$$

Eine in **t**-Richtung laufende Transversalwelle unterliegt dem Schermodul

$$\mathbf{G(t)} = \mathbf{G} \times \mathbf{t} = (E_{yz}\,\mathbf{i} + E_{zx}\,\mathbf{j} + E_{xy}\,\mathbf{k}) \times \mathbf{U} \times \mathbf{t} \quad (47)$$

Speziell sind mit $\mathbf{t} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ die Schermodule in Richtung der Hauptachsen

$$\mathbf{G(i)} = E_{yz}\,(\mathbf{kj} - \mathbf{jk}) \times \mathbf{i} = E_{yz}\,(\mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \quad (48)$$
$$\mathbf{G(j)} = E_{zx}\,(-\mathbf{ki} + \mathbf{ik}) \times \mathbf{j} = E_{zx}\,(\mathbf{ii} + \mathbf{kk}) \quad (49)$$
$$\mathbf{G(k)} = E_{xy}\,(\mathbf{ji} - \mathbf{ij}) \times \mathbf{k} = E_{xy}\,(\mathbf{ii} + \mathbf{jj}) \quad (50)$$

und haben die zugeordneten transversalen Wellengeschwindigkeiten $c_{x,y,z}$.

$$c_x = \sqrt{(E_{yz}/\rho)} \qquad c_y = \sqrt{(E_{zx}/\rho)} \qquad c_z = \sqrt{(E_{xy}/\rho)} \quad (51)$$

Die in x**i**-Richtung laufende Scherwelle unterliegt dank der 2D-Isotropie **(jj + kk)** des Schermodul **G(i)** (50) keiner Drehung der Polarisationsebene. Dasselbe gilt auch für die y**j**- und z**k**-Richtungen.

Analog zum longitudinalen Fall liegen auch die transversalen Slowness-Vektoren $c(\mathbf{t})^{-1}$ auf einem Ellipsoid und es kommt ebenfalls zu einer Strahlenkrümmung in Richtung der kleinsten Wellengeschwindigkeit.

$$c^2(\mathbf{t}) = c_x^2\,(\mathbf{i}\cdot\mathbf{t})^2 + c_y^2\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{t})^2 + c_z^2\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{t})^2 \quad (52)$$

Literaturverzeichnis.

[1] W. Voigt: Lehrbuch der Kristallphysik:. Teubner-Verlag, Leipzig 1910. 1920.
[1] H. Altenbach: Kontinuumsmechanik. 2. Auflage. Springer-Vieweg Verlag. Berlin. Heidelberg. 2012.
[2] E. Lohr: Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. W. de Gruyter-Verlag. Berlin 1939.
[3] J. Betten: Tensorrechnung... Teubner-Verl. Stgt. (1987)
[4] D. Royer, E. Dieulesaint: Elastic Waves in Solids. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 2000.
[5-8] O. Bschorr: DAGA-Fortschritte Akustik. [5] 2020.S. 1085. [6] 2013. S 1262/3 [7] 2014. S. 80/1, [8] 2016. S. 270/1.