Digitale FIR-Frequenzweichen in Multigrid-Frequenzabtaststruktur

Alexander Potchinkov[1]

[1] AG Digitale Signalverarbeitung TU Kaiserslautern, 67663 Kaiserslautern, Email:potchinkov@eit.uni-kl.de

Einleitung

Gegenstand dieses Aufsatzes sind FIR-Frequenzweichen, deren Filter in Struktur und Entwurf eine einheitliche Basis aufweisen. Wir gehen von reellwertigen Länge-N Filtern mit den Impulsantworten $h(n), n = 0, ..., N-1$, und den daraus mit der DFT gewonnenen Koeffizienten $H(k), k = 0, ..., N-1$, aus. Die Frequenzweichen fußen auf dem *Frequenzabtastverfahren*. Zunächst war das Frequenzabtastverfahren eine historische Methode zum Entwurf linearphasiger FIR-Filter mit im Vergleich zur Filterlänge N nur wenigen Entwurfsvariablen, die meist in den Filterübergangsbereichen zwischen Sperr- und Durchlaßbändern lagen. So konnte man mit linearer Programmierung bei nur geringen Variablenzahlen die Spitzenwerte der Approximationsfehler unter den Gleichungsbedingungen der unveränderlichen Abtastwerte minimieren [1]. Die korrespondierende Frequenzabtaststruktur wurde als besonders aufwandsgünstig für Filter mit nur schmalen Durchlaßbändern erkannt. Aus heutiger Sicht kann diese Struktur, die das Filter mit seinen DFT-Koeffizienten darstellt, als günstig im Zusammenhang mit solchen Frequenzgangentzerrern angesehen werden, die im laufenden Betrieb einzustellen sind.
Heutzutage ist Rechenleistung in vielen Fällen nicht mehr limitierender Faktor und auch Fließkommaarithmetik in einfacher wie auch in doppelter Genauigkeit ist sogar mit Microcontrollern, z.B vom Typ ARM M7, verfügbar. Wir werden daher die Frequenzabtastung auch für die Filterstruktur nutzen, wofür wir eine aufwandsreduzierende Technik, die Multigridtechnik, das Frequenzbereichs-Pendant zur Multiratentechnik im Zeitbereich, vorschlagen. Mit dieser Multigridtechnik können wir die Filterlängen der Weichenbänder und somit die Frequenzauflösungen im Sinne des Abstands konsekutiver Frequenzabtaststellen staffeln, d.h. große Filterlängen im Tiefton- und geringere Filterlängen im Mittel- und Hochtonbereich. Diese Herangehensweise hat aber den Nachteil, daß an den Übergangsbereichen zweier Filter unterschiedlicher Länge die Flankensteilheiten nicht "zusammenpassen", weshalb wir zur Korrektur auch noch einen Allpassausgleich ausführen werden. Für die Frequenzabtastfilter schlagen wir auch ein besonders einfaches Entwurfsverfahren vor, womit dann das Thema des Aufsatzes komplettiert ist.

Frequenzabtastung

Die DFT ist die lineare Transformation, die einem Länge-N FIR-Filter im Zeitbereich eine Länge-N Folge im Frequenzbereich zuordnet.

$$\text{DFT:}\quad H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}},\ k = 0, ..., N-1.$$

So wie im Zeitbereich ein zeitkontinuierliches Signal $h(t)$ durch bandbegrenzte Interpolation aus dem zeitdiskreten Signal $h(n)$ mit

$$h(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) p(t - nT),\ p(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t},\ T = \frac{1}{f_t},$$

gewonnen wird, so erfolgt dies in vergleichbarer Weise im Frequenzbereich, dann mit periodischer Interpolation für $H(\omega)$ aus $H(k)$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) P\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right),$$
$$P(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}.$$

In der Literatur [1][2] finden wir die Frequenzabtaststruktur, mit der das FIR-Filter $H(z)$ linear mit den DFT-Koeffizienten $H(k)$ realisiert wird

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}. \tag{1}$$

Wir erkennen in (1) ein Länge-N FIR-Kammfilter, dessen Aufgabe es ist, die Impulsantwort $h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}$ zeitlich auf den Kausalabschnitt $n = 0, ..., N-1$ zu begrenzen und eine Parallelanordnung bedingt stabiler Resonatoren, die mit den komplexwertigen DFT-Koeffizienten $H(k)$ gewichtet werden. Die Ausgangssignale der Resonatoren, abgestimmt auf die DFT-Frequenzen $\omega_k = 2k\pi/N$, werden mit der Gewichtung summiert. Die Positionen der Nullstellen des Kammfilters und die Positionen der Pole der Resonatoren korrespondieren miteinander.
Wenn wir nun statt der komplexwertigen DFT-Koeffizienten reellwertige Koeffizienten M_k und φ_k mit

$$H(k) = M_k e^{j\varphi_k},\ k = 0, ..., N-1,$$

wählen, dann können wir die reellwertige Struktur

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \left[\frac{M_0}{1 - z^{-1}} + \frac{M_{N/2}}{1 + z^{-1}} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2M_k \left(\cos(\varphi_k) - \cos\left(\varphi_k - 2\pi\frac{k}{N}\right) z^{-1}\right)}{1 - 2\cos\left(2\pi\frac{k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}} \right] \tag{2}$$

für N gerade verwenden. Ein Strukturbild für das Eingangssignal $x(n)$ und das Ausgangssignal $y(n)$ zeigt Abb. 1. Für die besonders interessanten linearphasigen FIR-Filter mit $\varphi_k = 2k\pi(N-1)/2$ finden wir bei [2] für den

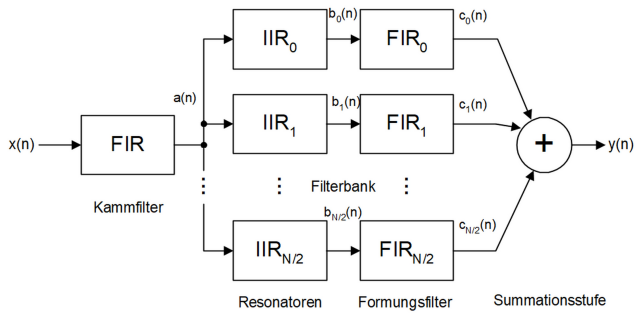

Abbildung 1: Frequenzabtaststruktur für reellwertige Koeffizienten und beliebige Phase

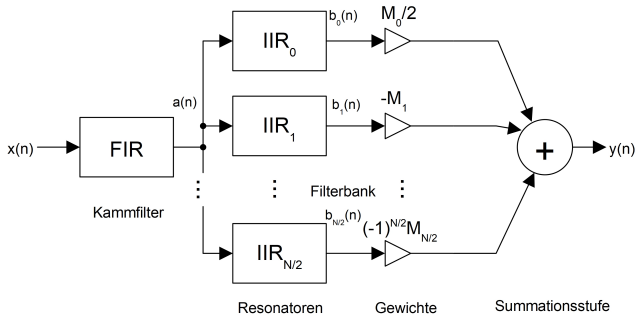

Abbildung 2: Frequenzabtaststruktur für reellwertige Koeffizienten und lineare Phase

Fall gerader Filterlänge N die vereinfachte Struktur

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N}\left(1 - z^{-2}\right) \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} M_k \frac{(-1)^k}{1 - 2\cos\left(2\pi\frac{k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}},\ M_0 := \frac{M_0}{2}. \tag{3}$$

Ein Strukturbild zeigt Abb. 2.

Der Block FIR schließt den Term $(1 - z^{-2})$ ein. Der Betragsfrequenzgang $M(\omega)$ von (3) läßt sich mit Hilfe der Interpolationskerne (4)

$$S(\omega, N, k) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)},\ k = 0,\ \omega \neq 0, \\ \frac{(-1)^k \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N}\right)}\right), \\ k = 1, ..., \frac{N}{2}, \omega \neq 0, \omega \neq 2\pi\frac{k}{N}, \\ (-1)^k,\ \omega = 0,\ \omega = 2\pi\frac{k}{N}, \end{cases} \tag{4}$$

in der Form

$$M(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} M_k S(\omega, N, k)$$

berechnen. Der Rechenaufwand für eine Resonator-Gewichts-Kombination beträgt zwei reelle Multiplikationen und zwei reelle Additionen. Bei Festkommaarithmetik ist auf ausreichende Wortlänge zu achten, da die bedingte Stabilität kritisch sein kann. Man kann aber die Nullstellen des Kammfilters und die korrespondierenden Pole der Resonatoren mit Hilfe eines reellwertigen positiven Parameters r, $z_\cdot := rz_\cdot$, $r < 1$, ein kleines Stück

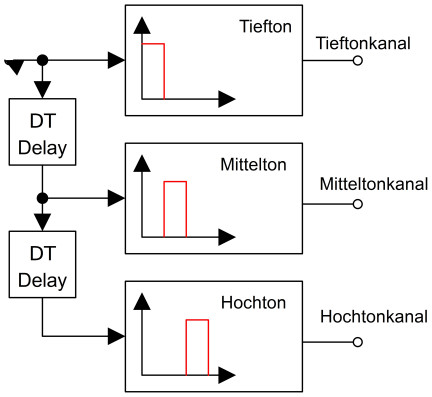

Abbildung 3: Multigridtechnik einer Dreiwegeweiche

in den Einheitskreis der Z-Ebene hineinziehen um so unbedingte Stabilität sicherzustellen. Diese Maßnahme führt aber zu Abweichungen vom gewünschten Frequenzgang. Für das in diesem Aufsatz angegebene numerische Beispiel ist eine 32-Bit-Festkommaarithmetik auch ohne Sicherheitsparameter möglich. Fließkommaarithmetik ist für diese Struktur dennoch besser geeignet.

Multigridtechnik

Wünschenswert ist es, wenn im tieffrequenten Bereich die Filterlängen N größer und somit die Frequenzauflösung $d_f = f_t/N$, f_t ist die Abtastfrequenz, feiner ausfällt. Die übliche Herangehensweise mit Zeitbereichsfiltern ist hier die Multiratentechnik, die mit Hilfe von Dezimatoren und Interpolatoren den Tieffrequenz-Betrieb mit reduzierten Abtastfrequenzen und dann mit Filtern geringer Größe erlaubt, wobei sich die resultierende Filterlänge durch Produkt dieser Filterlänge und dem Dezimationsfaktor ergibt. Bei der Multigridtechnik hingegen arbeiten alle Filter unterschiedlicher Länge bei derselben Abtastfrequenz, womit Aliasing entfällt. Man sollte aber geschickterweise die Frequenzauflösungen in den Übergangsbereichen zwischen Filtern unterschiedlicher Länge nicht teilerfremd wählen.

Abb. 3 zeigt am Beispiel einer Dreiwegeweiche die prinzipielle Struktur der Multigridtechnik für drei unterschiedliche Filterlängen.

Filterentwurfsverfahren und Beispiel

Das Filterentwurfsverfahren setzt voraus, daß die Übernahmefrequenzen auf den korrespondierenden DFT-Rastern liegen. Das Verfahren ist dreischrittig.
Im ersten Schritt, Festlegung der Referenzfilter, werden die M_k mit den Werten $M_k = 0$ in den Sperrbereichen, $M_k = 1$ in den Durchlaßbereichen und $M_k = 0.5$ für Allpasscharakteristik des Betragsfrequenzgangs bzw. $M_k^2 = 0.25$ für den Leistungsfrequenzgang gesetzt. Abb.4 zeigt dies für ein Bandpassfilter.
Im zweiten Schritt wird ein Cosinusdatenfenster $w(n)$ der

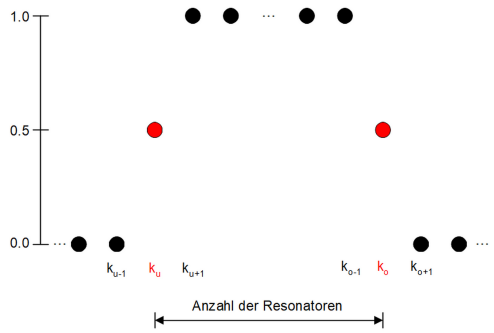

Abbildung 4: Referenzfilterkoeffizienten

Länge N vom Grad m [3],

$$w(n) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \, (-1)^p \cos\left(\frac{2\pi p n}{N}\right), \; n = 0, ..., N-1, \qquad \sum_{p=0}^{m-1} a_p = 1, \tag{5}$$

mit $2m + 1$ von N nicht verschwindenden DFT-Koeffizienten $W(k)$,

$$W(k) = a_0\delta(k) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m-1} a_p \, (-1)^p \left(\delta(k-p) + \delta(N-k-p)\right), \qquad k = 0, ..., N-1, \; W(k) = W(k+sN), \; s \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

durch Faltung im Frequenzbereich angewendet. Für linearphasige FIR-Filter läßt sich mit einfacher Rechnung zeigen (Kausalshift beachten!)

$$M_{Wk}e^{j\varphi_k} = e^{j\varphi_k}\sum_{n=0}^{N-1} M_n \left|W(k-n)\right|, \; k = 0, ..., N-1,$$

$$M_{Wk} = \sum_{n=0}^{N-1} M_n \left|W(k-n)\right|, \; k = 0, ..., N-1,$$

wofür die Frequenzbereichsfaltung mit der Fenster-DFT-Folge, vergleiche mit (5),(6),

$$W = \left\{\frac{a_{m-1}}{2}, \frac{a_{m-2}}{2}, ..., \frac{a_1}{2}, a_0, \frac{a_1}{2}, ..., \frac{a_{m-2}}{2}, \frac{a_{m-1}}{2}\right\}, \qquad \sum W = 1,$$

schließlich ausgeführt wird. Abb. 5 zeigt den Effekt der Fensterung, das Fensterfilter, am Beispiel $m = 3$. Das Fenster bewirkt einen weicheren Übergang zwischen Sperr- und Durchlaßbändern und somit dann auch die gewünschte Abschwächung des sog. Gibbschen Phänomens.
Der dritte Schritt ist der Allpassausgleich für die Übergänge zweier Filter unterschiedlicher Länge. Wie bereits ausgeführt, bedingt die Multigridtechnik die Notwendigkeit des Allpassausgleichs. Das bedeutet, daß das Filter mit der geringsten Länge, das Hochtonfilter, vorzugeben ist und die zum nächsten Filter größerer Länge anstoßende Flanke mit demnach feinerer Frequenzauflösung

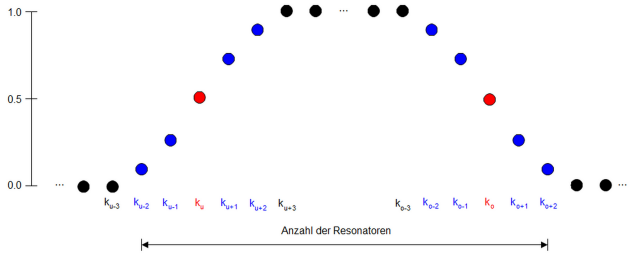

Abbildung 5: Fensterfilterkoeffizienten, m=3

mit dem Ziel des Ausgleichs anzupassen ist. Auf diese Weise arbeitet man sich bis zum Filter mit der größten Länge, dem Tieftonfilter, vor. Ein Vorteil unseres speziellen Filterentwurfsverfahrens ist die Unabhängigkeit der Gestaltung beider Flanken eines Bandpassfilters.
Wir führen den Entwurf einer Dreiwege-Frequenzweiche durch, deren Hauptparameter in der Tabelle 1 zusammengefaßt sind. Alle drei Filter sind Bandpassfilter mit den Grenz- bzw. Übergangsfrequenzen f_u und f_o. Die

	N	d_f/Hz	f_u/Hz	f_o/Hz
Bass	9600	5	30	125
Mitten	1920	25	125	4500
Höhen	480	100	4500	18000

Tabelle 1: Hauptparameter der Dreiwegeweichenfilter

Tabelle 2 enthält die jeweilige Anzahl der in den Wegen benötigten Resonatoren und deren Summe für die gesamte Weiche, aufgeführt für die Referenzfilter (RF), die Fensterfilter (WF) und schließlich die Filter nach erfolgtem Allpassausgleich (AF). Die Abbildungen 6 bis 11

	(RF)	(WF)	(AF)
Bass	20	22	30
Mitten	176	178	184
Höhen	136	138	138
Summe	332	338	352

Tabelle 2: Jeweilige Anzahl der Resonatoren für die Dreiwegeweichenfilter

zeigen für Referenz-, Weichen- und Ausgleichsfilter die Übertragungsmaße und die Allpasseigenschaften. An den Abbildungen lassen sich die drei Entwurfsschritte gut demonstrieren. Es sei angemerkt, daß die Filterentwurfsberechnungen so einfach und numerisch unkritisch sind, daß auch sehr große Filter mit einigen tausend Koeffizienten in kurzer Zeit entworfen werden können.

Literatur

[1] Lawrence R. Rabiner, Bernard Gold, "Theory and Application of Digital Signal Processing," *Prentice-Hall*, 1975.

[2] Richard G. Lyons, "Understanding Digital Signal Processing," *Pearson*, 3. Edition, 2010.

[3] Hans-Helge Albrecht, "A family of cosine-sum windows for high-resolution measurements," in *ICASSP 2001*, IEEE Signal Processing Society, 2001.

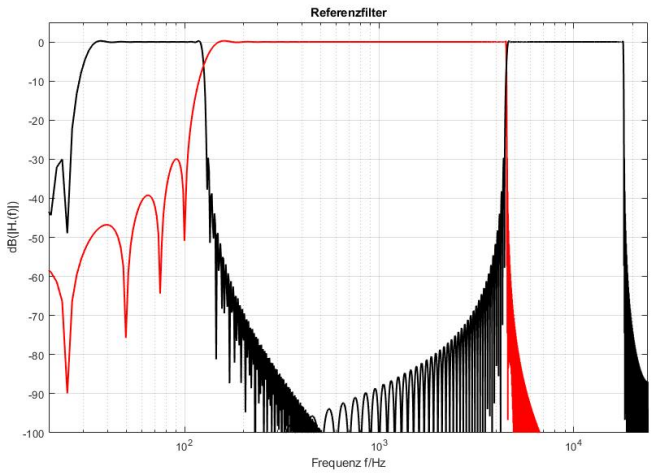

Abbildung 6: Übertragungsmaße Referenzfilter

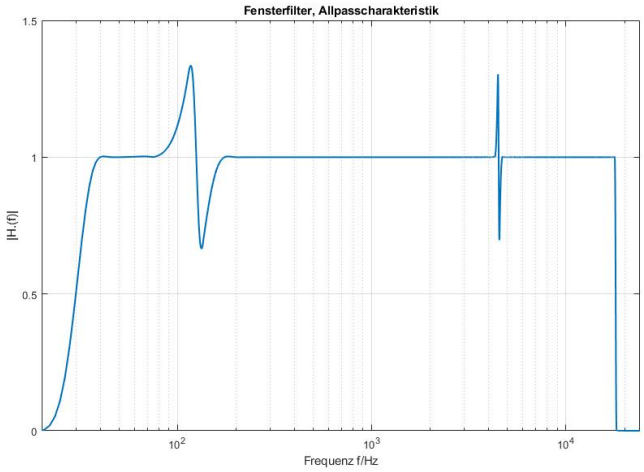

Abbildung 9: Allpasscharakteristik, Fensterfilter

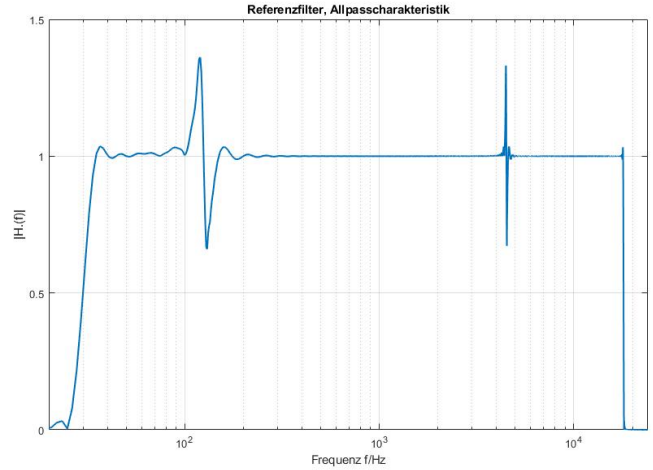

Abbildung 7: Allpasscharakteristik, Referenzfilter

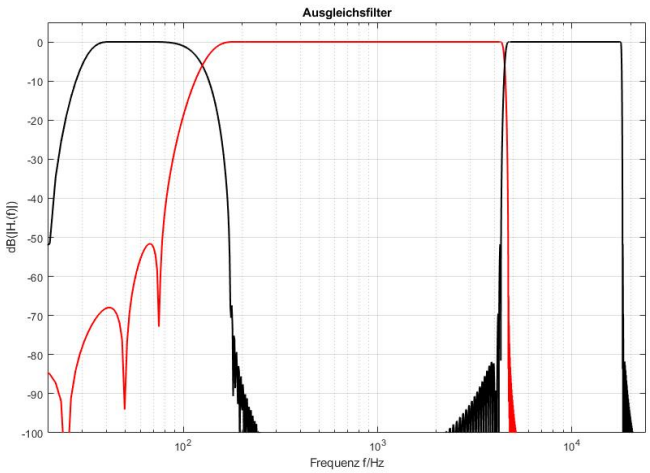

Abbildung 10: Übertragungsmaße, Ausgleichsfilter

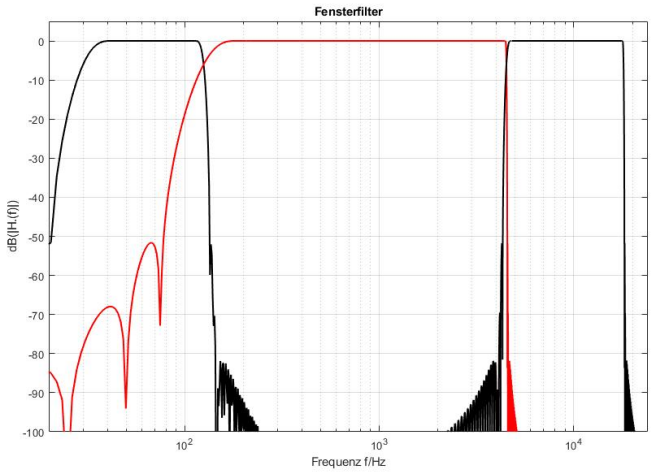

Abbildung 8: Übertragungsmaße, Fensterfilter

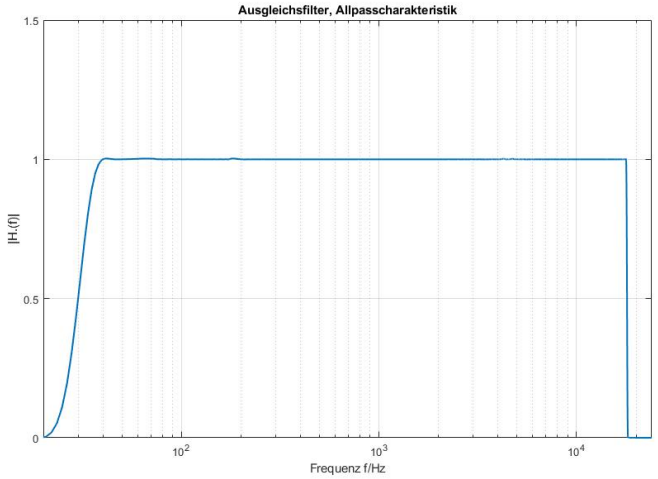

Abbildung 11: Allpascharakteristik, Ausgleichsfilter