

Randbedingungen der Galbrun-Gleichung in komplexen Strömungen

Marcus Guettler, Steffen Marburg

Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, Technische Universität München

Boltzmannstraße 15, 85748 Garching b. München, Deutschland, Email: Marcus.Guettler@tum.de

Einleitung

Im Bereich der Aeroakustik befasst man sich häufig mit Außenraumproblemen, bei denen die akustische Abstrahlung von Quellen in komplexen Strömungen im Mittelpunkt der Untersuchung stehen. Die damit einhergehende Behandlung des Fernfeldes, formuliert durch die Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung, erweist sich unter Zuhilfenahme numerischen Methoden aus unterschiedlichen Gründen schwierig.

Zum einen sieht die Theorie vor, dass das Fernfeld bis in die Unendlichkeit von der Quelle ausgedehnt ist und keine Signale, hier akustische Wellen, aus dem Fernfeld in das Quellgebiet propagieren. Zum anderen wird durch die weite Ausdehnung des Fernfeldes der rechnergestützte Simulationsaufwand zu hoch und aus Kostengründen unpraktikabel. Eine Begrenzung des Fernfeldes durch einen finiten Raum mit äußerer Berandung ist deshalb die logische Konsequenz. Die Herausforderung liegt nun in der Behandlung des Randes, dessen Eigenschaft derart gestaltet werden muss, damit die Wirkung des Fernfeldes auf das Berechnungsgebiet erhalten bleibt. Durch die konsequente mathematische Behandlung entstehen Rand- und Anfangswertprobleme, die sich mithilfe numerische Methoden lösen lassen. Hierfür bieten sich die Finite-Volumen-Methode, die Finite-Differenzen-Methode oder die Finite-Elemente-Methode an. Die Approximation des Fernfeldes gelingt mit absorbierenden Rändern, den infiniten finiten Elementen oder den perfekt abgestimmten Schichten (PML).

Im Bereich der Strömungsakustik kommt hinzu, dass man sich Gedanken über den Ein- und Auslass der Strömung machen muss, da das Berechnungsgebiet häufig einer Euler'schen Betrachtung genügt und sich die Strömung relativ zum Berechnungsgitter bewegt.

Neben unterschiedlichen Formulierungsmöglichkeiten, wie den akustischen Analogien von Lighthill, Curle und Ffowcs Williams und Hawkins, existieren Störungsansätze. Zu diesem Bereich gehören die linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen, die linearisierten Euler-Gleichungen oder die Störungsgleichungen, welche alle eine Euler'sche Betrachtung verwenden. Galbrun [4] verfolgt einen ähnlichen Ansatz unter Zuhilfenahme einer Euler-Lagrange'schen Betrachtungsweise, welche Vorteile bei der Beschreibung von Randbedingungen gegenüber den erwähnten Ansätzen zeigt. Bonnet-Ben Dhia u.a. [2], Retka und Marburg [5] und Treysse u.a. [6] nutzten diese Möglichkeit der Formulierung erfolgreich.

Bermúdez u.a. [1] präsentierten eine optimale Dämpfungsfunktion für die Anwendung von PML

für die Helmholtz-Gleichung. Feng u.a. [3] zeigten, dass eine PML für die Galbrun-Gleichung im Zeitbereich möglich ist.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist zu untersuchen, ob die bestehenden Formulierungen der PML auf die Galbrun-Gleichung im Frequenzbereich angewendet werden können und ob diese die erwartete Wirkung des Fernfeldes auf das Berechnungsgebiet aufweisen.

Theorie

Die Galbrun-Gleichung in gemischter Formulierung bietet sich an, um eine hohe Stabilität bei der numerischen Behandlung zu gewährleisten, vergl. [6]:

$$\rho_0 \frac{D^2 w_k}{Dt^2} - p_{0,l} w_{k,l} + p_{0,k} w_{l,l} + p_{,k} = 0_k, \quad \text{in } \Omega_F, \quad (1)$$

$$w_j n_j \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (2)$$

$$p + c_0^2 \rho_0 w_{l,l} = 0 \quad \text{in } \Omega_F, \quad (3)$$

$$p = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F \quad (4)$$

mit

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + v_{0k}(\cdot)_{,k} \quad \text{und} \quad (\cdot)_{,k} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}$$

wobei die Einstein'sche Summationskonvention gilt. Die Größen w_l und p stellen die gesuchten Feldgrößen, d.h. Partikelverschiebung und Druckfluktuation, c_0 die Schallgeschwindigkeit, ρ_0 die Fluidichte, p_0 den Fluidruck in Ruhe dar. Die Fluidgeschwindigkeit der Referenz wird mit v_{0l} bezeichnet. Das Symbol Ω_F deutet auf das Berechnungsgebiet und Γ_F auf dessen Berandung.

Um das dargestellte Problem im Frequenzbereich lösen zu können, wird zunächst ein harmonischer Zeitanatz in der Form $\phi(x, t) = \phi(x) e^{-i\omega t}$ mit der imaginären Einheit i und der Kreisfrequenz ω gewählt. Des Weiteren erfolgt der Zugang zur numerischen Behandlung über die schwache Form nach dem Variationsprinzip und der Diskretisierung nach Galerkin. Dies kann formal durch

$$\int \left(\rho_0 \frac{D^2 w_k}{Dt^2} - p_{0,l} w_{k,l} + p_{0,k} w_{l,l} + p_{,k} \right) w_k^* d\Omega_F = 0$$

$$\forall w_k^* \in V \quad \text{wobei} \quad V = (H_0^1(\Omega_F))^2 \quad (5)$$

und

$$\int (p + c_0^2 \rho_0 w_{l,l}) p^* d\Omega_F = 0$$

$$\forall p^* \in Q \quad \text{wobei} \quad Q = L^2(\Omega_F) \quad (6)$$

beschrieben werden. Dabei kommen die beiden Testfunktionen w_k^* und p^* zum Einsatz.

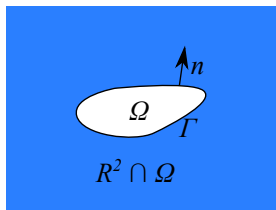
Die Formulierung der PML gelingt durch Umformulierung des Gradientenoperators, welcher in der Galbrun-Gleichung auftritt. Dies ist äquivalent zu einer Koordinatentransformation, wobei innerhalb des ursprünglichen Berechnungsgebietes die Galbrun-Gleichung Anwendung findet und innerhalb der PML die Galbrun-Gleichung mit transformierten Gradientenoperator. Drei unterschiedliche Transformationen werden im Weiteren betrachtet:

$$\begin{aligned}
 x_c &= a + \lambda \left(\frac{x-a}{a^*-a} \right) (1-i) && \text{Comsol Multiphysics} \\
 x_b &= x + \frac{i}{\omega} \int_0^x \sigma_x(s) ds && \text{Bermúdez u.a. [1]} \\
 x_a &= x_b + \beta x_c && \text{Gemischt}
 \end{aligned}$$

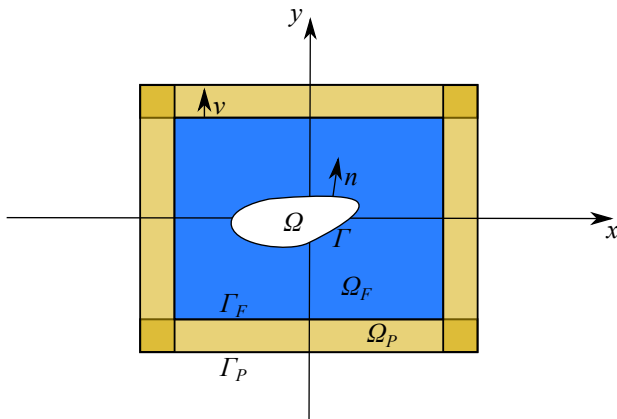
Für die weiteren Untersuchungen wurden $\sigma_x(s) = \frac{c_0}{a^*-s}$ und $\beta = -0.15$ gesetzt.

Numerische Umsetzung

Für die numerische Umsetzung wird das Softwaretool COMSOL Multiphysics 5.2a verwendet. Zur Definition des unbegrenzten und begrenzten Gebiets wird Abbildung 1 heran gezogen.



(a) Unberandetes Gebiet



(b) Durch PML begrenztes Gebiet

Abbildung 1: Grundkonfiguration des Berechnungsgebietes

Bezüglich der Diskretisierung durch finite Elemente werden unterschiedliche Ansatzfunktionen für die Partikelverschiebung und die Druckfluktuation verwendet, wobei quadratische Ansatzfunktionen für die Verschiebung und lineare Ansatzfunktionen für den Druck zum Einsatz kommen.

Abbildung 2 verdeutlicht die Verteilung der Freiheitsgrade innerhalb eines finiten Elementes.

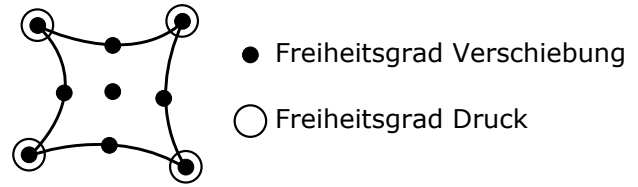
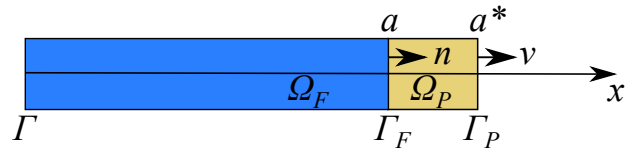


Abbildung 2: Finites Element mit quadratischem Ansatz für Verschiebungsgröße und linearer Ansatz für Druckgröße

Ebene Welle

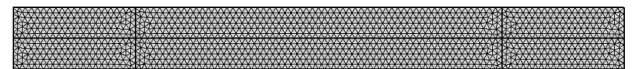
Im Weiteren wird die Ausbreitung einer ebenen Welle innerhalb eines Rohres im Frequenzbereich untersucht, welches ein eindimensionales Problem darstellt.



(a) Geometrie des Kanals



(b) Umsetzung in Comsol Multiphysics



(c) FE-Netz

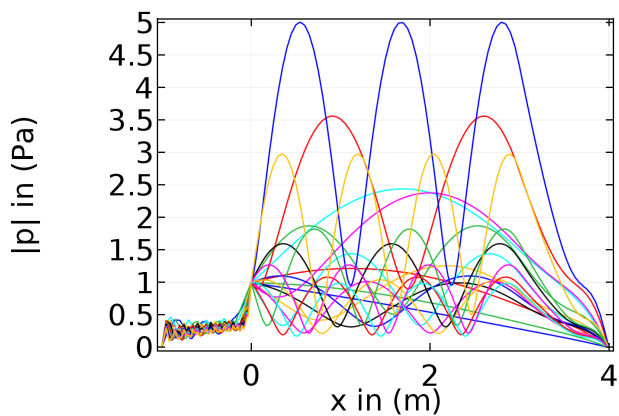
Abbildung 3: Kanalproblem

Abbildung 3 verdeutlicht die Geometrie des durchströmten Kanals, die Umsetzung in Comsol Multiphysics mit einer beidseitigen Berandung durch eine PML-Schicht und dem generierten FE-Netz. Folgende Randbedingungen werden an das Gebiet gestellt:

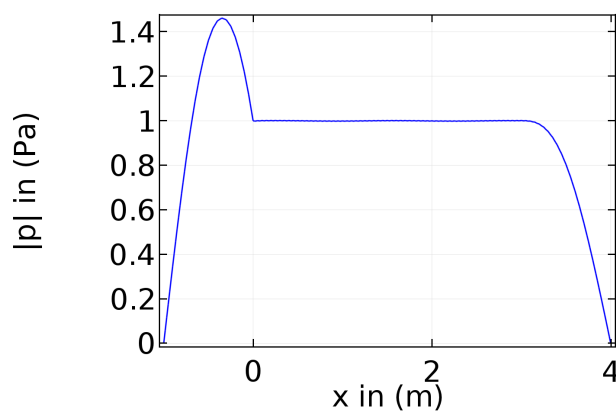
$$\begin{aligned}
 p(x = -(a^* - a)) &= p(x = a^*) = 0 \\
 p(x = 0) &= 1 \text{ Pa} \\
 w_x(x = -(a^* - a)) &= w_x(x = a^*) = 0
 \end{aligned}$$

Aus der Theorie ist bekannt, falls es keine Reflexionen an den Rändern des Berechnungsgebietes gibt, dass der Betrag des Schalldruckes innerhalb des Kanals für $v_0 = 0$ konstant über alle Frequenzen bleibt. Für die Berechnung werden diskrete Frequenzpunkte bei $f = 10, 20 \dots 200$ Hz betrachtet. Die Ergebnisse zeigen, inwieweit die unterschiedlichen Formulierungen der PML die Erwartungen erfüllen.

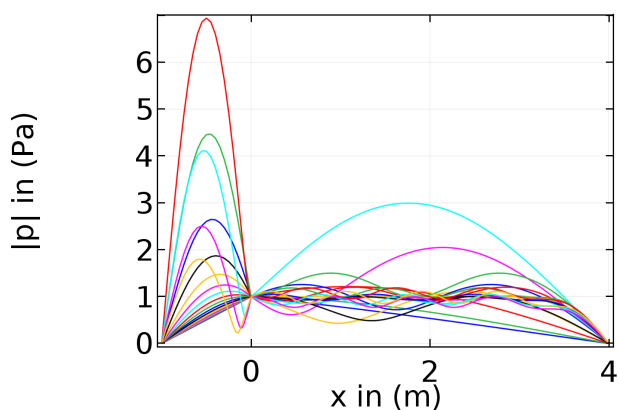
Abbildung 4 zeigt die Ergebnisse des Schalldruckes p entlang der Mittellinie innerhalb des Kanals für die entsprechenden PML-Formulierungen bei unterschiedlichen Frequenzen, wobei die Mach-Zahl $Ma = \frac{v_0}{c_0} = 0$ festgelegt ist. Die Geometrie des Kanals ist durch die beiden Größen $a = 3$ m und $a^* = 4$ m definiert.



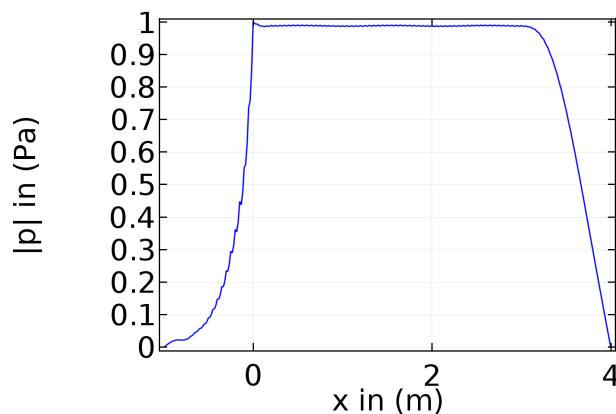
(a) Comsol Multiphysics Formulierung



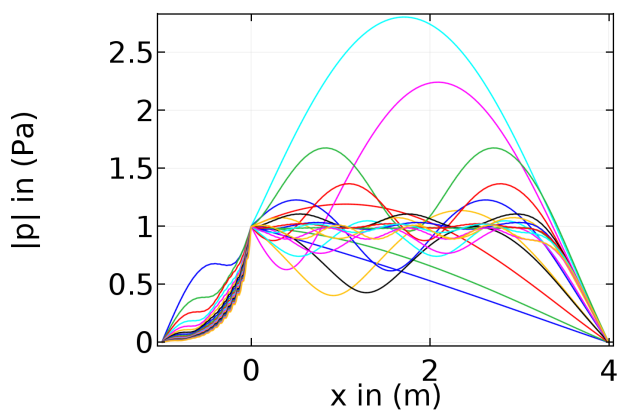
(a) Formulierung nach Bermúdez u.a. [1]; $f = 129.5$ Hz



(b) Formulierung nach Bermúdez u.a. [1]



(b) Gemischte Formulierung; $f = 161.7$ Hz



(c) Gemischte PML-Formulierung



(c) Visualisierung des Schalldrucks für die gemischte Formulierung; $f = 161.7$ Hz

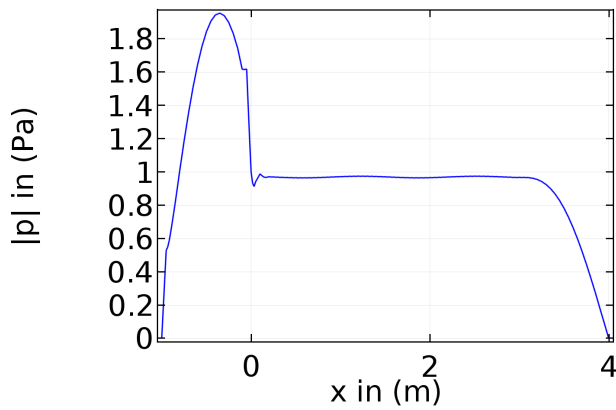
Abbildung 4: Ergebnisse des Kanalproblems

Es ist ersichtlich, dass alle drei Formulierungen nicht die erwarteten Ergebnisse zeigen. Bei näherer Betrachtung der Resultate der Formulierungen nach Bermúdez u.a. [1] und der gemischten Formulierung scheinen für spezielle Frequenzen keine Reflexionen zu entstehen. Dies verdeutlicht Abbildung 5.

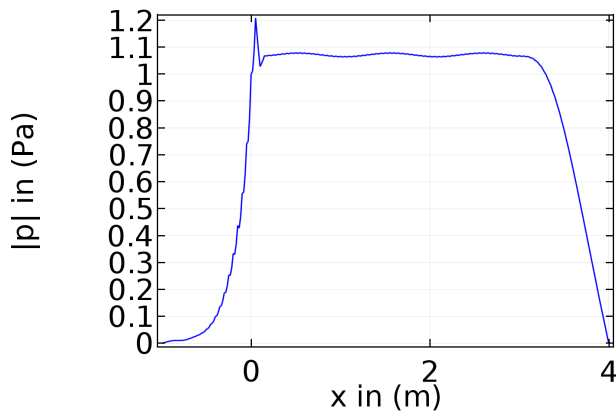
Abbildung 5: Ergebnisse des Kanalproblems für spezielle Frequenzen

Die Resultate zeigen, dass es bei bestimmten Frequenzen die Formulierungen ihre erwartete Wirkung auf das Berechnungsgebiet haben. Eine entsprechende mathematische Beschreibung scheint allerdings unter dem Umstand, dass dies in der dargelegten Form nur für eine Frequenz gilt, komplizierter zu sein.

Um den Effekt einer Strömung zu betrachten, wird im folgenden die Mach-Zahl auf $Ma = 0.1$ gesetzt, d.h. es entsteht eine laminare Strömung in x-Richtung mit konstanten Strömungsprofil über die Breite des Kanals.



(a) Formulierung nach Bermúdez u.a. [1]; $f = 129.5$ Hz; $Ma = 0.1$



(b) Gemischte Formulierung; $f = 161.7$ Hz; $Ma = 0.1$

Abbildung 6: Ergebnisse des Kanalproblems für spezielle Frequenzen für $Ma = 0.1$

Es ist deutlich zu erkennen, siehe Abbildung 6, dass die bei der Formulierung nach Bermúdez u.a. [1] der Schalldruck innerhalb der linken PML-Zone, d.h. stromaufwärts, stark zunimmt und innerhalb des Berechnungsgebietes leicht sinkt. Bei der gemischten Formulierung entsteht dieser Effekt in der stromaufwärts liegenden PML-Zone nicht. Dafür steigt der Schalldruck innerhalb des Berechnungsgebietes leicht und ein gewisser Anteil der durchlaufenden Welle wird zurück reflektiert, was zu einer leichten Oszillation des Schalldruckes innerhalb des Kanals führt.

Zusammenfassung und Ausblick

In der Strömungsakustik existieren unterschiedliche Formulierungen, um die Wirkung eines bewegten Fluides auf die Ausbreitung und Entstehung von Schall zu untersuchen. Die hier verwendete Methode nach Galbrun nutzt eine gemischte Euler-Lagrange'sche Betrachtungsweise zur Beschreibung von Störung innerhalb der Strömung. Die daraus entstehenden partiellen Differenzialgleichungen, die zusammen mit den Rand- und Anfangsbedingungen das Randwertproblem darstellen, werden mithilfe der Finiten-Elemente-Methode diskretisiert und im Frequenzbereich gelöst. Besonderer Augenmerk liegt bei der Formulierung der Ränder, um den Effekt einer Schallausbreitung ins Fernfeld abzubilden. Die aufgezeigte Metho-

de der Perfectly-Matched-Layers wird auf die Galbrun-Gleichung angewendet und die entsprechende Wirkung der PML auf das Berechnungsgebiet untersucht.

Es zeigt sich, dass die PML-Formulierungen potenziell für die Beschreibung des Fernfeldes nutzbar sind. Allerdings funktionieren diese derzeit nur für diskrete Frequenzen. Hier bedarf es weiterer Untersuchungen, um einen breiten Frequenzbereich abdecken zu können.

Literatur

- [1] Bermúdez, A.; Hervella-Nieto, L.; Prieto, A.; Rodríguez, R.: An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems. *Journal of Computational Physics* **223** 2 (2007), pp. 469–488
- [2] Bonnet-Ben Dhia, A. S.; Mercier, J. F.; Millot, F.; Pernet, S.; Peynaud, E.: Time-Harmonic Acoustic Scattering in a Complex Flow: A Full Coupling Between Acoustics and Hydrodynamics. *Commun. Comput. Phys.* **11** 2 (2012), pp. 555–572
- [3] Feng, X.; Tahar, M.B.; Baccouche, R.: PML absorbing boundary conditions for the aero acoustic Galbrun equation in the time domain. *Journal of the Acoustical Society of America* **139** 1 (2016), pp. 320–321
- [4] Galbrun, H.: Propagation d'une Onde Sonore dans l'Atmosphère et Théorie des Zones de Silence. Gauthier-Villars, Paris, 1931
- [5] Retka, S.; Marburg, S.: An infinite element for the solution of Galbrun equation. *Zamm, Z. Angew. Math. Mech.* **93** 2-3 (2013), pp. 154–162
- [6] Treysse, F.; Gabard G.; Tahar, M. B.: A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description. *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (2003), pp. 705–716