

# Einfluss der Strömungsgrenzschicht in zylindrischen Kanälen auf die Radialmodenanalyse von Turbomaschinenlärm

Mirko Spitalny<sup>1</sup>, Ulf Tapken<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Antriebstechnik,

Abt. Triebwerksakustik, 10623 Berlin, Deutschland, Email: mirko.spitalny@dlr.de, ulf.tapken@dlr.de

## Einleitung

Die Radialmodenanalyse ist die gängige Methode zur Bestimmung der Schalleistung von Rotor-Stator-Interaktionstönen in Turbomaschinen, ermöglicht eine Analyse der dominanten Schallanregungsmechanismen und stellt somit ein wichtiges Werkzeug zur akustischen Bewertung von Turbomaschinendesigns dar. Die akustischen Daten für die Schallfeldanalyse werden meist mit wandbündigen Mikrofonarrays aufgezeichnet. Mit einer Ausgleichsrechnung werden bei der Radialmodenanalyse die Schallfelddaten an ein Modell für die Schallausbreitung im Kanal angepasst. Eine analytische [1] oder numerische Eigenlösung [3] bildet die modale Basis für das zu lösende Gleichungssystem. Erstere beinhaltet ein konstantes Strömungsprofil, die zweite bildet die Strömung mit einer Grenzschicht ab. Enghardt et al. [4] zeigen, wie die numerische Eigenlösung durch Lösung eines Randwertproblems mit einem Schießverfahren berechnet werden kann. In [3] wird die numerische Eigenlösung über ein erweitertes Eigenwertproblem bestimmt. Weckmüller et al. zeigen, dass die beiden Verfahren äquivalente Ergebnisse liefern[6]. Zudem werden von Weckmüller et al. die Eigenlösungen mittels einer CAA Rechnung verifiziert.

Um einen Eindruck vom Gültigkeitsbereich des Standard-Analyseansatzes zu gewinnen, werden in den folgenden Studien Testfälle mithilfe der für ein Grenzschichtprofil gültigen numerischen Eigenlösungen konstruiert und anschließend mit den für das kastenförmige Strömungsprofil gültigen analytischen Eigenlösungen ausgewertet.

## Beschreibung der Modenausbreitung im Kanal

Bei der Radialmodenanalyse wird als Schallfeldmodell die konvektive Wellengleichung für den Schalldruck  $p$  in Zylinder-Koordinaten verwendet, die in Gleichung 1 angegeben ist. Die axiale Strömungsgeschwindigkeit ist durch  $U_x$  gegeben,  $c$  repräsentiert die Schallgeschwindigkeit,  $\rho$  die Dichte.

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{D}{Dt} \right)^2 p - \rho \frac{dU_x}{dr} \frac{\partial u'_r}{\partial x} - \Delta p = 0 \quad (1)$$

Unter der Bedingung inkompressibler, isentroper Grundströmung und stationärer mittlerer Temperatur und Dichte lässt sich die konvektive Wellengleichung durch den in Gleichung (2) gegebene Modenansatz für den Schalldruck in einem schallharten, zylindrischen Kanal lösen[1]. Der Schalldruck an einem Ort setzt sich aus

der Superposition modaler Anteile zusammen, die sich bzgl. der azimuthalen ( $m$ ) bzw. radialen ( $n$ ) Modenordnung unterscheiden. Zusammenfassend werden die modalen Anteile als Radialmoden bezeichnet. Die Wellenausbreitung in  $x$ -Richtung wird durch die axiale Wellenzahl  $k_{mn}^\pm$  beschrieben, die der jeweiligen Modenordnung zugeordnet ist. Der Index  $\pm$  bezeichnet die Wellenausbreitung in und gegen die Strömungsrichtung. Im Fall eines kastenförmigen axialen Strömungsprofils  $U_x = \text{const.}$  sind die radialen Formfunktionen des Drucks  $f_{mn}(r)$  durch eine Linearkombination von Bessel- und Neumannfunktionen gegeben und die axialen Wellenzahlen können explizit berechnet werden[1].

$$p(x, r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^\pm \cdot e^{i(k_{mn}^\pm x + m\varphi)} \cdot f_{mn}(r) \quad (2)$$

## Modenausbreitung unter Berücksichtigung eines Grenzschichtprofils

Die konvektive Wellengleichung Gl. (1) berücksichtigt eine radiale Abhängigkeit der mittleren, axialen Strömungskomponente:

$$U_x = (U_x(r), 0, 0) \quad (3)$$

Ausgehend von dem Ansatz in Gleichung (4) für die Schwankungsgrößen kann ein erweitertes Eigenwertproblem aufgestellt werden[3]. Dieses wird unter der Randbedingung schallharter Wände mittels QZ-Algorithmus gelöst. Hierbei wird die radiale Koordinate mittels eines Chebyshev Polynoms diskretisiert.

$$(u, v, w, p) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})(r) e^{i(\omega t - k_x x - m\varphi)} \quad (4)$$

Als Lösung erhält man die axialen Wellenzahlen  $k_{mn}^\pm$  und die radialen Formfunktionen  $f_{mn}(r)$  der Moden. Für ein konstantes Strömungsprofil ist die Lösung identisch zu den analytisch bestimmten Eigenfunktionen.

## Radialmodenanalyse mittels Ausgleichsrechnung

Ausgangspunkt der Radialmodenanalyse sind Schalldruckdaten, die auf einem Messgitter erfasst werden.

Diese Messgitter können hinsichtlich der zu untersuchenden Frequenzen und erwarteten Moden optimiert werden [5]. Die Bestimmung des Radialmodenspektrums erfolgt durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems, welches in Gleichung (5) in Vektor-Matrix-Schreibweise dargestellt ist. Die Systemmatrix  $W$  beinhaltet sowohl die modalen Eigenlösungen als auch die geometrischen Positionen an denen der Schalldruck  $p$  vorliegt. Die Modenamplituden  $a$  werden durch Invertierung der Systemmatrix bestimmt. Da im Allgemeinen die Anzahl der Moden bzw. der resultierenden Sensorpositionen nicht gleich sind, wird die Matrixinvertierung mit Hilfe der Pseudoinverse durchgeführt, wie in Gleichung (6) angegeben.

$$\underline{p} = \underline{W} \cdot \underline{a} \quad (5)$$

$$\underline{a} = [\underline{W}^H \underline{W}]^{-1} \underline{W}^H \cdot \underline{p} \quad (6)$$

Aus den Modenamplituden lässt sich nach Morfey [2] die Schallleistung der Moden berechnen.

### Stabilitätsanalyse der Systemmatrix

Die Kondition einer Matrix berechnet sich aus dem Verhältnis des größten zum kleinsten Singulärwert der Matrix (vergleiche Gleichung (7)). Die Kondition ist ein Maß für die Fortpflanzung von Störungen in den Eingangsgrößen. In dem Fall der Modenanalyse gibt sie einen Anhaltspunkt für die Stabilität des Analyseergebnisses.

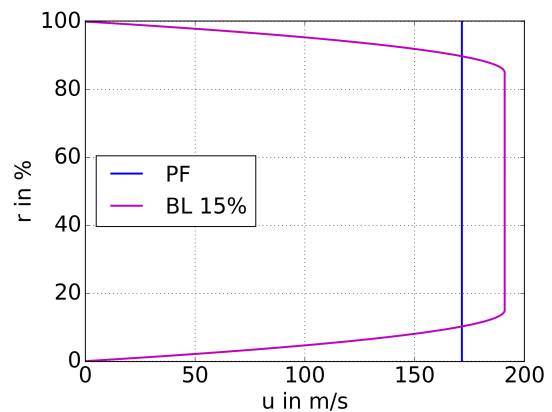
$$k(W) = \frac{\zeta_{max}(W)}{\zeta_{min}(W)} \quad (7)$$

### Untersuchung des Einflusses der Strömungsgrenzschicht auf die Radialmodenanalyse

Zur Untersuchung des Einflusses der Strömungsgrenzschicht auf die Radialmodenanalyse wird ein Schallfeld auf einem Messgitter mit den numerischen Eigenlösungen synthetisiert, die ein Grenzschichtprofil berücksichtigen. Die Analyse wird mit zwei verschiedenen Sätzen von Eigenlösungen durchgeführt: Einmal mit den analytischen Eigenlösungen für den Standard-Ansatz mit einem kolbenförmigen Strömungsprofil (plug flow - PF) und einmal mit den numerischen Eigenlösungen für das Grenzschichtprofil (boundary layer - BL), die auch in der Synthese verwendet wurden. In den Fällen A und B wurde die stromab laufende Mode  $m,n=(0,0)$  mit einer Amplitude von 100dB synthetisiert. Im Fall B wurden zusätzlich die höheren, ausbreitungsfähigen, radialen Ordnungen der azimutalen Modenordnung  $m=0$  mit zufälligen Amplituden synthetisiert, deren Pegel 40dB unterhalb der Zielmode lagen. Es wurde die Mode  $m=0$  für die Untersuchung gewählt, da bei dieser die meisten radialen Ordnungen ausbreitungsfähig sind und die höchsten axialen Wellenzahlen auftreten (vergleiche [7]).

Das Messgitter, auf dem das Schallfeld synthetisiert und analysiert wird, besteht aus 60 axialen Positionen mit einem relativen, axialen Abstand  $\Delta x/R=0,022$  und 180

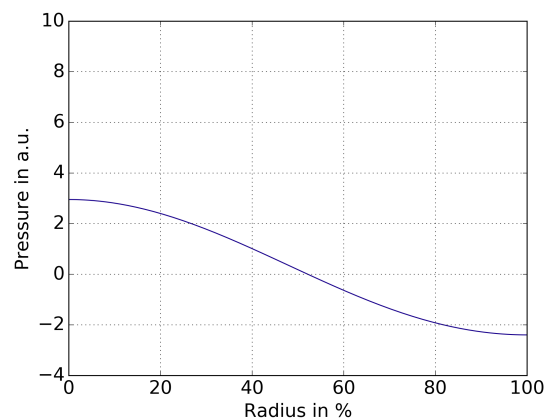
gleichmäßig verteilten Umfangspositionen. Alle Messpositionen befinden sich am äußeren Kanalradius  $R$ . Das Nabenverhältnis  $\eta$  beträgt 0,66. Die Messektion ist zylindrisch. Die Strömung wird im Fall des kolbenförmigen Profils (Plug Flow - PF) mit einer Machzahl von 0,5 und im Fall des massenstromäquivalenten Grenzschichtprofils (BL) mit quadratischem Verlauf und einer Grenzschichtdicke  $\delta_{99}$  von 15% abgebildet (siehe Abbildung 1). Es werden Helmholtz-Zahlen  $kR$  (mit dem Außenradius  $R$  entdimensionalisierte Freifeldwellenzahlen) von 2,5-102,5 untersucht.



**Abbildung 1:** Axiale Strömungskomponente für das kolbenförmige Profil (blau) und das Grenzschichtprofil (magenta)

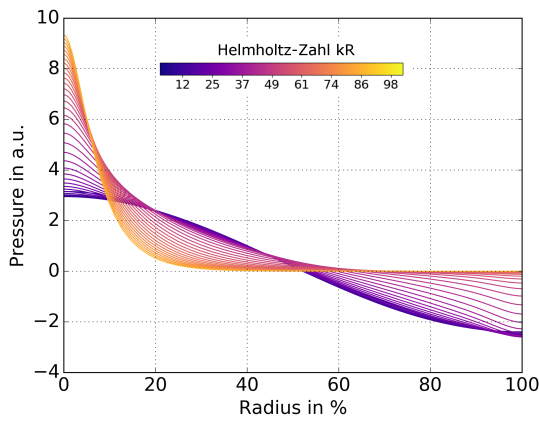
### Betrachtung der Eigenlösungen

Der Vergleich von Abbildung 2 und 3 zeigt, dass die numerisch berechneten, radialen Eigenformen des Drucks im Gegensatz zum analytischen Fall, abhängig von der betrachteten Helmholtz-Zahl sind. Mit steigender Frequenz werden die Differenzen in den Eigenlösungen zwischen dem analytischen und dem numerischen Fall größer.



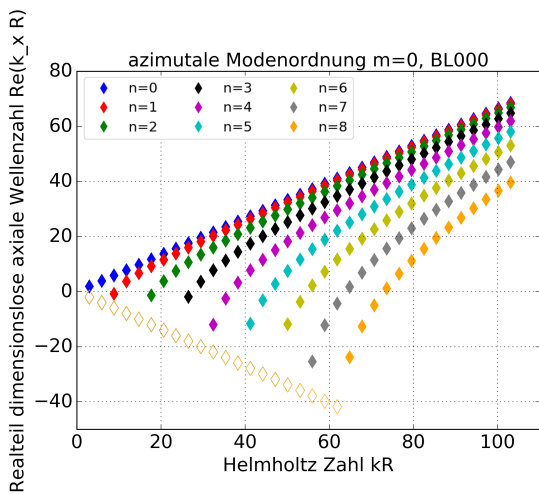
**Abbildung 2:** Radiale Eigenfunktionen der Mode  $m=0, n=1$  für das kolbenförmige Strömungsprofil

Die Werte der in Abbildung 3 dargestellten Eigenfunktionen können im Fall der numerischen Lösung an den Kanalwänden gegen Null tendieren, was eine schlechtere Kondition der Systemmatrix verursacht, insbesondere für wandbündige Messpositionen.



**Abbildung 3:** Radiale Eigenfunktionen der Mode  $m=0, n=1$  in Abhängigkeit der Helmholtz-Zahl für die Grenzschicht

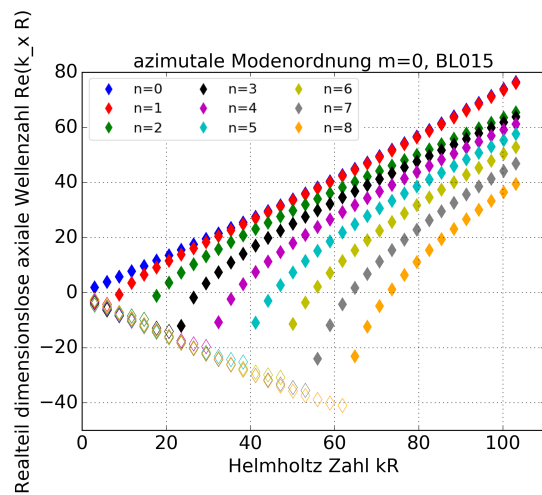
Die axialen Wellenzahlen der Mode  $m=0$  zeigen erst bei großen Helmholtz-Zahlen deutliche Abweichungen zwischen der Berücksichtigung einer kolbenförmigen Strömung und der Strömung mit Grenzschicht. Die Unterschiede sind vor allem in den ersten radialen Ordnungen beim Vergleich von Abbildung 4 und 5 aus zu machen. Eine Studie zeigt, dass bereits kleine Abweichungen in den Wellenzahlen einen starken Einfluss auf das Analyseergebnis haben können[8].



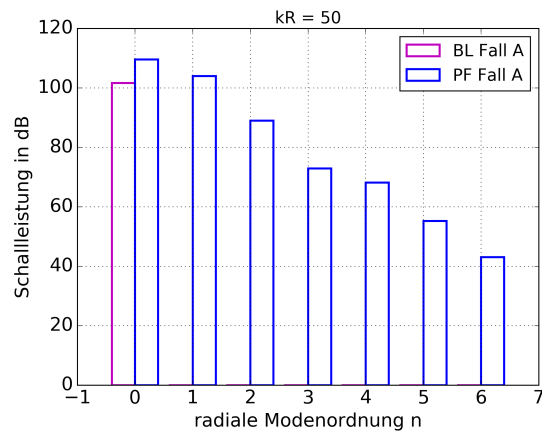
**Abbildung 4:** Axiale Wellenzahlen von Moden der azimuthalen Ordnung  $m=0$  und der radialen Ordnungen  $n=0, \dots, 8$  in Abhängigkeit der Helmholtz-Zahl für das kolbenförmige Strömungsprofil

### Ergebnisse

Die Abbildungen 6 und 7 zeigen die berechneten Schallleistungen der Mode  $m=0$  aufgeteilt nach ihren radialen Ordnungen für die Helmholtz-Zahl 50. Bei Anwendung der Standard-Modenanalyse, d.h. Verwendung der für das kastenförmige Strömungsprofil gültigen Eigenlösungen, wird die Leistung der Ordnung  $n=0$  um etwa 8dB überschätzt und darüber hinaus werden Schallfeldanteile in größerem Maße in die höheren radialen Ordnungen projiziert. Für den in Abbildung 7 dargestellten Fall B ist zu erkennen, dass die Analyse



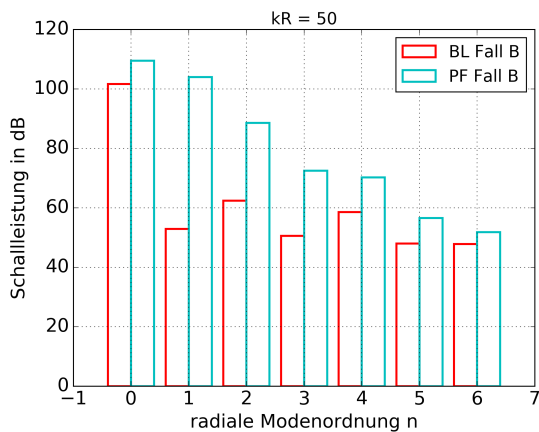
**Abbildung 5:** Axiale Wellenzahlen von Moden der azimuthalen Ordnung  $m=0$  und der radialen Ordnungen  $n=0, \dots, 8$  in Abhängigkeit der Helmholtz-Zahl für Grenzschicht



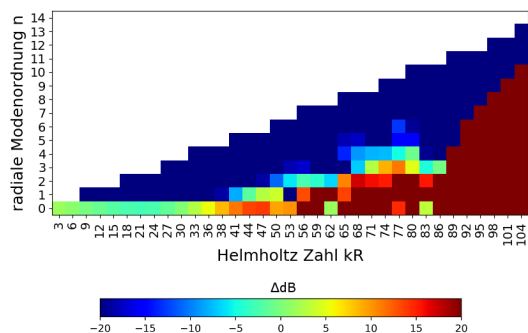
**Abbildung 6:** Schallleistung aller stromab laufenden Moden der azimuthalen Ordnung  $m=0$  bei einer Helmholtz-Zahl von 50, Testfall A, als Ergebnisse der Analysen mit Berücksichtigung unterschiedlicher Strömungsprofile

mit Berücksichtigung des Grenzschichtprofils auch die überlagerten, zufälligen Amplituden der höheren radialen Ordnungen korrekt wieder gibt. Für die Analyse mit Berücksichtigung des kolbenförmigen Strömungsprofils treten wieder Schallleistungen in höheren radialen Ordnungen auf und die Zielmode wird überschätzt.

In Abbildung 8 sind die Ergebnisse von Fall A und der Analyse mit Berücksichtigung einer Plug Flow Strömung über den gesamten, betrachteten Helmholtz-Zahl-Bereich dargestellt. Die Amplituden sind hier relativ zu der Amplitude der Synthese als Farbwert dargestellt. Es ist zu erkennen, dass bis zu einer Helmholtz-Zahl von 36 die vorgegebene Mode korrekt wieder gegeben wird. Das heißt, dass in diesem Bereich der Einfluss der Grenzschicht im Vergleich zum kolbenförmigen Profil nicht relevant ist. In dem Bereich von Helmholtz-Zahl 38 bis 83 tritt das in Abbildung 6 und 7 gezeigte Verhalten auf. Es treten in höheren radialen Ordnungen Schallleistungen auf, die nicht vorhanden sind und die Zielmode wird verfälscht wieder gegeben. Ab einer Helmholtz-Zahl von 86 können



**Abbildung 7:** Schalleistung aller stromab laufenden Moden der azimuthalen Ordnung  $m=0$  bei einer Helmholtz-Zahl von 50, Testfall B, als Ergebnisse der Analysen mit Berücksichtigung unterschiedlicher Strömungsprofile

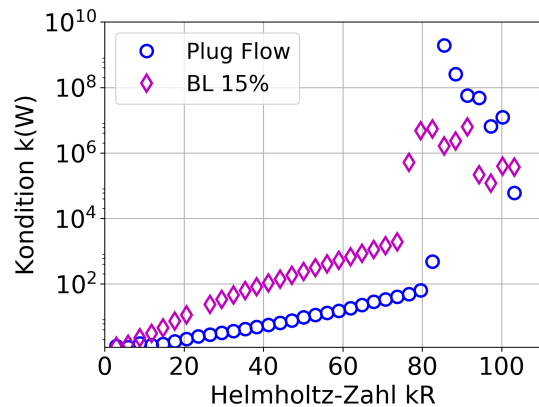


**Abbildung 8:** Schalleistung der stromab laufenden Moden der azimuthalen Ordnung  $m=0$  bei Modenanalyse des synthetischen Schallfelds von Testfall A in Abhängigkeit der Helmholtz-Zahl.

mit dem gewählten Messgitter nicht mehr alle Moden aufgelöst werden und die Analyse liefert keine sinnvollen Ergebnisse mehr. Dies zeigt sich auch in der ab dieser Helmholtz-Zahl schlechten Kondition, die in Abbildung 9 dargestellt ist. Mit Zunahme der Helmholtz-Zahl steigt auch die Anzahl der radialen Modenordnungen, die in der Analyse berücksichtigt werden. Somit wird auch die Systemmatrix größer. Die Differenzen in der Kondition der Systemmatrix mit kolbenförmige Strömungsprofil und Grenzschichtprofil sind auf die unterschiedlichen Werte der Eigenfunktionen an den Positionen des Messgitters zurück zu führen. Mittels Skalierung der radialen Eigenfunktionen kann die Kondition der für das Grenzschichtprofil gültigen Systemmatrix verbessert werden und ist für eine Modenanalyse im etwa gleichen Frequenzbereich nutzbar wie der Standard-Ansatz.

## Zusammenfassung

Die Wandgrenzschicht der Strömung zeigt mit ansteigender Frequenz zunehmenden Einfluss auf die Eigenfunktionen und Wellenzahlen. Die auf den analytischen Lösungen für das kolbenförmige Strömungsprofil basierende Standard-Radialmodenanalyse kann bei signifikanter Wandgrenzschicht ( $\delta_{99} = 15\%$ ), Helmholtz-Zahlen



**Abbildung 9:** Kondition der Systemmatrix für das kolbenförmige Strömungsprofil (blaue Kreise) und für das Grenzschichtprofil (magentafarbene Rauten) in Abhängigkeit der Helmholtz-Zahl

größer 36 und wandbündigen Messgittern zu erheblichen Abweichungen in den berechneten Schalleistungen führen. Hier sollten die passenden numerische Eigenlösungen verwendet werden. Die Kondition der für Grenzschichtströmung aufgestellten Systemmatrix kann schlechter als für die Systemmatrix beim Standard-Ansatz sein. Dies lässt sich vor allem auf die Funktionswerte der radialen Eigenfunktionen an den Kanalwänden zurück führen. Bei synthetischen Schallfeldern hat dies jedoch keinen Einfluss auf die Analysegenauigkeit.

## Literatur

- [1] Tyler J. M. and Sofrin T. G.: Axial flow compressor noise studies (1962)
- [2] Morfey C. L.: Acoustic Energy in Non-Uniform Flows (1971), Journal of Sound and Vibration 14(2)
- [3] Kousen, K. A.: Pressure modes in ducted flows with swirl (1996), 2nd AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference
- [4] Enghardt, L. and et al.: Acoustic Mode Decomposition of Compressor Noise under Consideration of Radial Flow Profiles (2005), 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics
- [5] Tapken, U. and Enghardt, L.: Optimization of Sensor Arrays for Radial Mode Analysis in Flow Ducts (2006), 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics
- [6] Weckmüller, C. and et al.: Acoustic Eigenmodes for Ducted Sheared Mean Flow: Validation with CAA (2014), 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference
- [7] Tapken, U.: Analyse und Synthese akustischer Moden von Turbomaschinen (2016), Dissertation, Technische Universität Berlin
- [8] Spitalny M. and Tapken, U.: Radial Mode Analysis of Ducted Sound Fields with Sensor Rakes and Wall Flush Sensor Arrays under Consideration of a Radial Flow Profile (2016), 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference