

Untersuchung verschiedener hybrider CAA-Formulierungen auf Basis des „hydrodynamic/acoustic splitting“

Thorben Schröder, Joscha Piepiorka, Patrick Silkeit und Otto von Estorff

TU Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, E-Mail: mub@tuhh.de

Einleitung

Die „hydrodynamic/acoustic splitting“ (HAS)-Ansätze sind eine Klasse von Simulationsverfahren in der numerischen Strömungsakustik (CAA). Strömungsmechanische und akustische Berechnungen sind im Sinne eines hybriden Verfahrens in zwei aufeinander folgende Schritte getrennt. Als hervorstechendes Merkmal basieren HAS-Methoden auf einer inkompressiblen Strömungssimulation (CFD), die akustischen Modellierungsgrößen sind kompressible Störungen. Zeitliche Ableitungen des Druckes sind die primären Quellterme für die Akustik. Die Einordnung als HAS-Methode wird hier sehr weit gefasst und an der Variablentrennung und dem resultierenden Quellterm festgemacht.

In diesem Beitrag werden mit dem „Expansion about Incompressible Flow“ (EIF, [1] bzw. [2]), der zweiten Variante der „Acoustic Perturbation Equations“ (APE bzw. APE2, [3]) und den „Linearized Perturbed Compressible Equations“ (LPCE, [4]) drei ausgesuchte Methoden betrachtet. Dabei ist es hier nicht möglich, die Verfahrensklasse umfassend zu analysieren, es sollen aber einige aus Sicht der Autoren besonders wichtige Aspekte in kompakter Form aufgezeigt werden. Dieses sind die für alle Verfahren gleichermaßen geltende Betrachtung des Interpolationsgebietes, ein Vergleich der Methoden bezüglich ihrer Behandlung von Wirbelmoden inklusive daraus entstehender Probleme und Chancen sowie eine Analyse der numerischen Effizienz der drei Beispielf Verfahren für eine explizite Zeitintegration.

Hydrodynamic/acoustic splitting

Die HAS-Ansätze heben sich insbesondere durch ihre Spezialisierung auf niedrige Mach-Zahlen (M) hervor. Die in diesem Fall besonders große Disparität der Energie in Akustik- und Strömungsanteilen erschwert Berechnungen mit anderen Verfahren oft. Bei dem HAS treten so gut wie keine hydrodynamischen Anteile im Akustiksignal auf, weshalb die Akustiksimulation unabhängig von der Mach-Zahl frei von Energiedisparitäten ist. Methoden, die auf dem HAS basieren, nutzen eine von anderen Verfahren abgrenzbare Auftrennung der physikalischen Größen. Hier wird die Klassifizierung weit gefasst und berücksichtigt alle Verfahren, deren Variablentrennung weitestgehend an der Definition

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{ic} + \mathbf{u}^{ac} \quad \rho = \rho^{ic} + \rho^{ac} \quad p = p^{ic} + p^{ac} \quad (1)$$

orientiert sind, wobei $(\dots)^{ic}$ inkompressible, hydrodynamische Anteile bezeichnet und $(\dots)^{ac}$ kompressible, akustische Schwankungen sind. Durch die spezielle Va-

riablentrennung werden im gesamten Simulationsgebiet fast ausschließlich akustische Moden berechnet. Dies erhöht die Aussagekraft von Ergebnissen im Nahfeld, da die mit Schallgeschwindigkeit ausbreitungsfähigen Anteile von den Strömungsanteilen unterschieden werden können.

Alle HAS-Methoden werden durch Einsetzen der Variablentrennung in die kompressiblen Strömungsgleichungen hergeleitet. Durch verschiedenartige Modifikationen und Annahmen ergeben sich jeweils zwei Sätze von partiellen Differentialgleichungen, welche schwach gekoppelt sind. Die hydrodynamischen Anteile werden durch die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mit Massenerhaltung beschrieben. Die Akustiksimulation wird auf Basis der CFD-Ergebnisse durchgeführt und soll in diesem Beitrag anhand dreier häufig verwendeter HAS-Verfahren betrachtet werden. Diese werden im Folgenden mit ihren jeweiligen akustischen Differentialgleichungssystemen kurz vorgestellt.

Expansion about Incompressible Flow

Der EIF ist die älteste HAS-Methode und wurde von Hardin und Pope [1] vorgestellt und von Shen und Sørensen [2] modifiziert. Durch Einsetzen der Auftrennung aus Gleichung (1) in die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ergibt sich das akustische Gleichungssystem

$$\frac{\partial \rho^{ac}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p^{ac}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho^{ac}}{\partial t} = - \frac{\partial p^{ic}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{u}^{ac} + \mathbf{u}^{ic}) \otimes \mathbf{f} + \rho_0 \mathbf{u}^{ac} \otimes \mathbf{u}^{ic}] + \nabla p^{ac} = 0, \quad (4)$$

wobei $\mathbf{f} = \rho \mathbf{u}^{ac} + \rho^{ac} \mathbf{u}^{ic}$ zur verkürzten Schreibweise eingeführt wurde, c die Schallgeschwindigkeit ist und \otimes ein dyadisches Produkt anzeigt. Zur Schließung des Gleichungssystems wird die Isentropenbeziehung $p' = c^2 \rho'$ genutzt, wobei alle Schwankungsanteile (inklusive der Strömungsanteile) als isentrop angenommen werden. Der EIF beinhaltet über die Annahme nichtviskoser Akustik und isentroper Strömung hinaus keine Vernachlässigung oder Vereinfachung von Termen. Damit kann auch Brechung an Scherschichten und der Einfluss von Konvektion durch instationäre Strömungsgeschwindigkeit uneingeschränkt dargestellt werden.

Zweite Variante der APE

Die APE2 ist eine für inkompressible Strömung ausgelegte Variante der APE von Ewert und Schröder [3] und beruhen auf einer Quellenfilterung. Die Filterung

schließt das Entstehen nicht-akustischer Moden, insbesondere der Wirbelmoden, aus und verspricht daher verbesserte Stabilität. Die Variablentrennung erfolgt geringfügig abweichend von Gleichung (1), kann aber für kleine Mach-Zahlen auf eine fast identische Form gebracht werden. Zusätzlich wird nur eine zeitlich gemittelte Strömungsgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{u}}$ eingeführt. Das akustische Gleichungssystem ergibt sich zu

$$\frac{\partial \rho^{ac}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{ac} \bar{\mathbf{u}} + \rho^{ic} \mathbf{u}^{ac}) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial p^{ac}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho^{ac}}{\partial t} = - \frac{\partial p^{ic}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{ac}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^{ac} + \frac{p^{ac}}{\rho^{ic}} \right) = 0. \quad (7)$$

Zur Schließung des Gleichungssystems wird dieselbe Isentropenbeziehung genutzt wie beim EIF. In der vollständigen Formulierung beinhaltet das Gleichungssystem weitere Quellterme, die aufwendig durch das Lösen einer (bzw. mehrerer) Poisson-Gleichungen berechnet werden müssen. Nach [3] sind die Terme für kleine Mach-Zahlen jedoch vernachlässigbar, was hier ausgenutzt wird. Viele der im Folgenden getätigten Aussagen treffen nur für die vereinfachte Variante zu.

Linearized Perturbed Compressible Equations

Die LPCE wurden von Seo und Moon [4] hergeleitet. Dabei werden Terme vernachlässigt, die Wirbelmoden anregen könnten, und mit ähnlichem Ergebnis wie bei der APE2 eine verbesserte Stabilität erwartet. Insgesamt sind sich beide Methoden sehr ähnlich und stehen in ihren Eigenschaften dem EIF gegenüber. Zentrales Unterscheidungsmerkmal zur APE2 in der präsentierten Form sind zum einen die Berücksichtigung auch transienter Anteile der Strömungsgeschwindigkeit und zum anderen die Verwendung einer kompressiblen Energiegleichung anstelle der Isentropenbeziehung zur Schließung des akustischen Gleichungssystems, welches sich zu

$$\frac{\partial \rho^{ac}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{ic} \cdot \nabla) \rho^{ac} + \rho^{ic} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{ac}) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial p^{ac}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{ic} \cdot \nabla) p^{ac} + p^{ic} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{ac}) + \gamma (\mathbf{u}^{ac} \cdot \nabla) p^{ic} = - \frac{Dp^{ic}}{Dt} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{ac}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}^{ic} \cdot \mathbf{u}^{ac} + \frac{p^{ac}}{\rho^{ic}} \right) = 0 \quad (10)$$

ergibt, wobei γ der Isentropenexponent ist und D/Dt eine substantielle Ableitung darstellt.

Ergebnisse

Als Beispielfall dient ein für Turbomaschinenlärm entwickelter Benchmark von Jacob et al. [5], der die Umströmung eines Zylinders beschreibt, in dessen Nachlauf sich ein NACA-0012 Flügelprofil befindet (ab hier Zylinder-Naca-Fall genannt). Die Strömung wurde mittels Large Eddy Simulation eines Ausschnittes in Spannweitenrichtung betrachtet. Auch die Akustik wird in diesem Ausschnitt dreidimensional gelöst, spiegelt damit

jedoch keinen realen Fall direkt wieder, da die wahre Schallabstrahlung durch in Spannweitenrichtung außer Phase befindliche Strömungsstrukturen beeinflusst wird. Eine Umrechnung auf ein zur Realität äquivalentes Ergebnis durch Pegelkorrektur ist möglich, jedoch anspruchsvoll und mit erheblichen Unsicherheiten verbunden. Da hier nur prinzipielle Phänomene gezeigt werden sollen, ist der fehlende Bezug zum Experiment nicht entscheidend. Der Fall ist in Abbildung 1 skizziert und wurde gewählt, da er Anwendungsrelevanz besitzt, als Umströmungsfall mit intensiven Scherschichten besonders anfällig für die Entwicklung von Wirbelmoden ist und mit $M = 0,21$ eine für die HAS-Ansätze recht hohe Mach-Zahl aufweist. Beide letztgenannten Eigenschaften sind interessant, da die Unterdrückung von Wirbelmoden in APE2 und LPCE unter diesen Voraussetzungen erheblichen Einfluss haben kann (siehe Abschnitt zu Wirbelmoden).

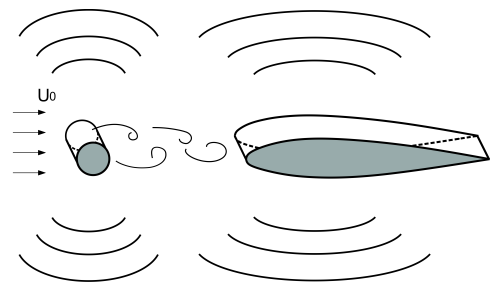


Abbildung 1: Skizze des Zylinder-Naca-Falls mit Akustik.

Quellterm und Interpolationsgebiet

Der dominante Quellterm aller HAS-Methoden ist eine zeitliche Ableitung des hydrodynamischen Drucks. Damit unterscheiden sie sich deutlich von anderen Ansätzen.

Ein Nachteil des Zeitableitungs-Quellterms ist seine Anfälligkeit für unphysikalische Fluktuationen des Strömungsdruckes, welche bei Simulationen basierend auf den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen oft nicht auszuschließen sind. Dieses Problem soll hier erwähnt aber nicht näher analysiert werden. Einer der Vorteile zeitlicher Ableitungen als Quellterm sind die typisch großen Längenskalen des Quellfeldes. Ein Weg der Erklärung hierfür ist, dass eine zeitliche Ableitung im Gegensatz zu örtlichen Ableitungen keine Hochpassfilterung im Wellenzahlbereich darstellt. Abbildung 2 zeigt beispielhaft Quellterme für den EIF (oben) und, als Repräsentant aus einer anderen Methodenklasse, die Lighthill-Analogie (unten) im Zylinder-Naca-Fall. Es ist zu erkennen, dass der EIF-Quellterm deutlich größere Strukturen beinhaltet als der auf örtlichen Ableitungen basierende Lighthill-Quellterm. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, im Quellgebiet eine gröbere Diskretisierung zu wählen und eventuell Zeitschritte zu vergrößern.

Die großen Längenskalen des Quellterms können auch Nachteile bringen. Dazu muss verstanden werden, dass die Strömungslösung immer nur im CFD-Gebiet bekannt ist und nur in diesem auf das Akustiknetz interpoliert werden kann. In vielen Fällen ist es sogar sinnvoll, einen

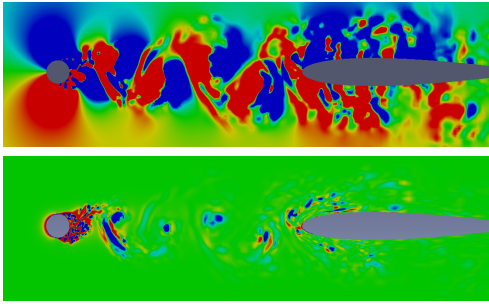


Abbildung 2: Quellterme für EIF (oben) und Lighthill-Analogie (unten) im Zylinder-Naca-Fall. Die Maximalwerte der Farbskala (blau=niedrig, rot=hoch) sind jeweils auf 1 % der globalen Extrema festgelegt.

noch kleineren Bereich zur Interpolation zu nutzen, da am Rand der CFD häufig stabile, aber unphysikalische Randbedingungen für den Druck verwendet werden, welche zu entsprechend falschen HAS-Quelltermen führen. Wenn die Längenskalen des Quellterms die Größe des Interpolationsgebietes erreichen, entstehen Probleme. Offensichtlich ist zunächst die Diskontinuität des Quellterms, deren Beseitigung (z.B. durch Fensterung) für gute Ergebnisqualität jedoch oft nicht ausreicht. Dies gilt, wenn relevante Quellanteile bis über die Grenzen des CFD-Gebietes hinausgehen (z.B. im Zylinder-Naca-Fall). Anders ausgedrückt deckt die typische Größe von CFD-Gebieten (abzüglich problematischer Bereiche am Rand) oft nicht das gesamte für HAS-Methoden relevante Quellgebiet ab. Eine Vergrößerung des CFD-Gebietes wäre nötig, ist aus Effizienzgründen aber zu vermeiden. Die Autoren nutzen daher ein selbst entwickeltes Verfahren zur Abschätzung von Druckfeldern außerhalb des CFD-Bereiches. Dieses basiert auf der Lösung einer Vereinfachung der in der CFD oft verwendeten Poisson-Gleichung für den Druck. Das Verfahren zeigt sehr gute Ergebnisse [6], soll hier jedoch nicht im Fokus stehen.

Abbildung 3 zeigt am Zylinder-Naca-Fall den Einfluss der Größe des Interpolationsgebietes ohne Behandlung der Diskontinuität. Alle Ergebnisse beruhen auf der gleichen CFD-Rechnung, nutzen aber jeweils nur Teile des CFD-Gebietes für die Interpolation auf das Akustiknetz. Es ist zu erkennen, dass keine der Lösungen direkt als korrekt identifizierbar ist. Weiterhin treten bei $h = 50d$ besonders stark gestörte Ergebnisse auf, da bis zur CFD-Randbedingung interpoliert wird. Nach Erfahrung der Autoren ist das Abschneiden des Quellgebietes eines der größten Probleme bei der Anwendung der HAS-Methoden. Assoziierte Fehler sind teils leicht zu übersehen. Quellfelder mit besonders großen Längenskalen und entsprechende Schwierigkeiten treten bei Strömungen mit großskaligen Instabilitäten auf, wie der hier betrachtete Zylinder-Naca-Fall beispielhaft zeigt.

Wirbelmoden

Das bei der Herleitung des HAS zunächst entstehende Gleichungssystem beinhaltet außer akustischen Longitudinalwellen auch Wirbel- und Entropiemoden. Beide Anteile bewegen sich mit Strömungsgeschwindigkeit und

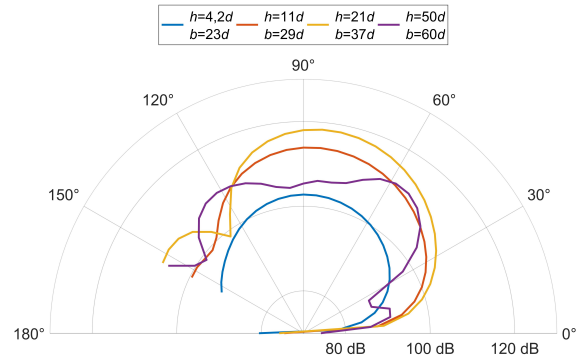


Abbildung 3: Richtcharakteristik des Schalldruckpegels bei $r = 0,6 m$ und der primären Abstrahlungsfrequenz mit der APE2 im Zylinder-Naca-Fall. Ergebnisse für verschiedene rechteckige Interpolationsgebiete mit Höhe h und Breite b als Vielfache des Zylinderdurchmessers d .

sind für akustische Ergebnisse irrelevant. Insbesondere Wirbelmoden können problematisch sein, da eine korrekte physikalische Abbildung extrem aufwendig ist, bei inkorrektur Abbildung aber Instabilitäten drohen [4]. In APE2 (hier verwendete Form) und LPCE wird durch unterschiedliche Maßnahmen die Entstehung von Wirbelmoden im akustischen Gleichungssystem ausgeschlossen. In beiden Fällen ist das Ergebnis, dass Terme, welche Wirbelmoden anregen können, vernachlässigt werden, was nach [3, 4] für die Berechnung akustischer Moden erst bei wachsender Mach-Zahl zu Fehlern führt.

Wirbelmoden im akustischen Gleichungssystem entstehen in erster Linie in Scherschichten. Daher ist die Umströmung von Körpern besonders anfällig für assoziierte Fehler [4] und der betrachtete Zylinder-Naca-Fall gut für die Analyse entsprechender Phänomene geeignet. Abbildung 4 zeigt, dass sich im Zylinder-Naca-Fall mit dem EIF deutlich schneller Wirbelanteile im akustischen Ergebnis ausbilden, diese jedoch in diesem Fall nicht instabil werden. In leicht abgewandelten Fällen wurden jedoch auch Instabilitäten beobachtet. Wirbelanteile in APE2 und LPCE sind als numerische Fehler anzusehen.

Ein Problem bei der Vernachlässigung der Wirbelmoden auslösenden Terme ist, dass diese auch andere Effekte (z.B. Brechungseffekte an Scherschichten [7]) beinhalten können. Da die Vernachlässigung der Wirbelterme weiterhin insbesondere für kleine Mach-Zahlen argumentiert wird [3, 4], kann angenommen werden, dass dies bei mäßigen Mach-Zahlen zu zusätzlichen Fehlern führt. Diese These wird durch die folgende Untersuchung bestärkt.

Abbildung 5 zeigt, dass APE2 und LPCE im Zylinder-Naca-Fall fast identische Ergebnisse liefern. Das EIF-Ergebnis weicht insbesondere bei dem Anteil mit 1350 Hz (Strouhal-Frequenz des Zylinders) in Richtung der Anströmung ab. Durch wieder Hinzufügen der zur Wirbelmodenunterdrückung gestrichenen Terme in APE2 und LPCE konnte das Verhalten des EIF reproduziert werden. Da Fehler durch falsch berechnete Wirbelmoden weiterhin primär im Nachlauf des CFD-Gebietes zu erwarten sind und keine der Rechnungen zur Instabilität neigte, wird angenommen, dass die Vernachlässigung der

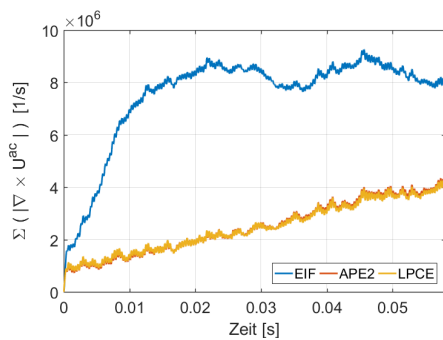


Abbildung 4: Entwicklung der Summe über Wirbelmodenanteile in allen Simulationszellen im akustischen Ergebnis.

Wirbelmoden auslösenden Terme in diesem Fall für Fehler sorgt. Dies und weitere hier nicht gezeigte Untersuchungen sind ein Hinweis darauf, dass der EIF bei leicht erhöhten Mach-Zahlen vorzuziehen sein kann. Eine in Zukunft zu untersuchende Möglichkeit könnte eine regelmäßige (alle \times Zeitschritte) Filterung von Wirbelmoden aus dem mittels EIF berechneten Ergebnis sein. So könnten Instabilitäten verhindert werden ohne Terme streichen zu müssen, die auch andere Effekte erzeugen. Ein deutlich aufwendigerer Ansatz wäre die Nutzung der vollen APE2 mit Quelltermfilterung in jedem Zeitschritt.

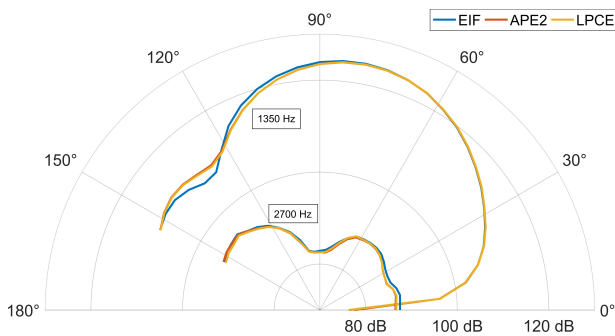


Abbildung 5: Richtcharakteristik bei des Schalldruckpegels $r = 0,6 m$ im Zylinder-Naca-Fall für zwei Frequenzen.

Numerischer Aufwand

Da der von den Autoren in OpenFOAM entwickelte CAA-Löser auf expliziter Zeitintegration mittels 5-stufigem Runge-Kutta basiert, ist es für die numerische Effizienz der Verfahren entscheidend, wie teuer eine explizite Auswertung aller Ableitungsterme des Differentialgleichungssystems in finiten Volumen ist. Der numerische Aufwand für den EIF ist unter anderem aufgrund der aufwendigen Auswertung des zweiten Terms in Gleichung (4) recht hoch. LPCE und APE2 benötigen deutlich weniger komplexe Ableitungsauswertungen. Die LPCE sind aufgrund der umfangreicheren Terme etwas weniger effizient als die APE2. In der vorhandenen programmtechnischen Umsetzung und bei unterschiedlichen Beispielrechnungen ergab sich, dass die APE2 etwa um den Faktor 1,4 – 1,8 und die LPCE um den Faktor 1,2 – 1,5 schneller sind als der EIF. Dabei wurde ausgenutzt, dass Ableitungsterme teilweise zur Effizienzverbesserung zusammengefasst oder umformuliert werden können und alle Ansätze wurden in eine Form umgeformt, bei der eine

Gleichung weniger zu lösen ist. Verglichen wurden jeweils die benötigten Zeiten für die gesamte Simulation, wobei der Aufwand für Ableitungsauswertungen dominierte.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurden neben einer Einführung und kurzen Diskussion theoretischer Grundlagen drei ausgeuchte Methoden der Klasse HAS (EIF, APE2 und LPCE) analysiert. Ohne Anspruch auf vollständige Analyse wurden einige aus Sicht der Autoren besonders wichtige Aspekte betrachtet. Für alle Verfahren gleichermaßen geltend konnte demonstriert werden, dass die Wahl eines geeignet großen Gebietes für die Interpolation von CFD-Ergebnissen auf das Akustiknetz bei HAS-Ansätzen besonders wichtig und anspruchsvoll ist. Ein Vergleich der Methoden bezüglich ihrer Behandlung von unerwünschten Wirbelmoden lässt vermuten, dass APE2 und LPCE im Zylinder-Naca-Fall durch die Vernachlässigung Wirbelmoden anregender Terme Fehler verursachen. Zum Abschluss konnte festgestellt werden, dass bei expliziter Zeitintegration deutliche Unterschiede in numerischen Aufwand entstehen. Die Ableitungsterme der APE2 sind am effizientesten auswertbar.

In Zukunft werden sich die Autoren mit weiteren Beispielfällen und einer Verwendung des EIF mit regelmäßiger Filterung von Wirbelmoden beschäftigen.

Literatur

- [1] Hardin, J. C. und Pope, D. S.: An Acoustic / Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 6 (1994), 323–340.
- [2] Shen, W. Z. und Sørensen, J. N.: Comment on the Aeroacoustic Formulation of Hardin and Pope. *AIAA Journal Readers' Forum* 37 (1999), 141–145
- [3] Ewert, R. und Schröder, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *Journal of Computational Physics* 188 (2003), 365–398
- [4] Seo, J. H., und Moon, Y. J.: Linearized Perturbed Compressible Equations for Low Mach Number Aeroacoustics. *Journal of Computational Physics* 218 (2006), 702–719
- [5] Jacob, M. C., Boudet, J., Casalino, D. und Michard, M.: A Rod-Airfoil Experiment as a Benchmark for Broadband Noise Modeling. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 19 (2005), 171–196
- [6] Schröder, T., von Estorff, O.: Handling of spatially truncated source fields based on pressure time derivatives in hybrid computational aeroacoustics. Eingereicht zu Veröffentlichung im *International Journal of Aeroacoustics*
- [7] Si, H., Shen, W. und Zhu, W.: Effect of Non-Uniform Mean Flow Field on Acoustic Propagation Problems in Computational Aeroacoustics. *Aerospace Science and Technology* 28 (2013), 145–153